فصل ۲

انواع توابع (زوج و فرد، صعودی و نزولی، یک‌به‌یک و پوشا)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

توابع زوج و توابع فرد

۱- اگر $f=\{(-۱,a+۱),(\ ,۳),(-۲,۱),(۱,b),(۲,b+۵)\}$ یک تابع زوج باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۰- ۳) ۱۲- ۴) ۱۲

۲- اگر تابع $f=\{(-۱,۲),(\ ,a),(۲,b+c),(c-b,-۲),(-۲,۷)\}$ یک تابع فرد باشد، حاصل $۲a+b-۲c$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) قابل تعیین نیست.

۳- تابع حقیقی $f=\{(۲,a),(۱,b),(\ ,c),(d,\ ),(e,g)\}$ هم زوج است و هم فرد. مجموع مقادیر مجهول در تعریف تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) قابل تعیین نیست.

۴- چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر f تابعی فرد باشد، آن‌گاه $f(\ )=\ $.

ب) اگر f تابع ثابت صفر باشد، آن‌گاه f هم زوج است و هم فرد.

پ) اگر برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$، آن‌گاه f فرد است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵- چند تا از توابع زیر زوج و چند تا فردند؟

الف) $\begin{cases} f:[-۱,+\infty)\to R \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

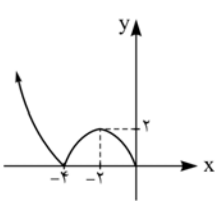
ب) $\begin{cases} f:R\to R \\ f(x)=x \end{cases}$

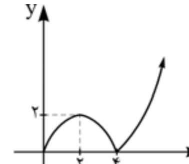
پ) $\begin{cases} f:(-۳,۳)\to R \\ f(x)=|x| \end{cases}$

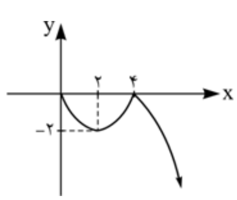
ت) $\begin{cases} f:(-۲,-۱)\quad(۱,۲)\to R \\ f(x)= \end{cases}$

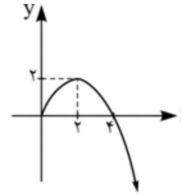
۱) ۳ تا زوج - ۲ تا فرد ۲) ۲ تا زوج - ۱ فرد ۳) ۱ زوج - ۱ فرد ۴) ۲ تا فرد - ۲ تا زوج

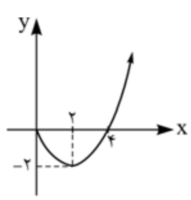
۶- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد f رسم شده است. کدام گزینه بقیه‌ی نمودار تابع f را نشان می‌دهد؟



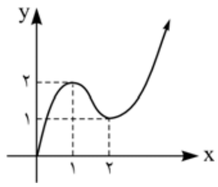
۱)


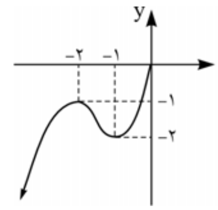
۲)


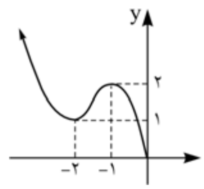
۳)


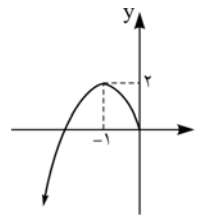
۴)


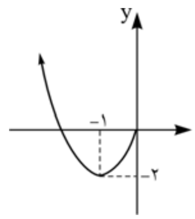
۷- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع زوج f رسم شده است. کدام گزینه بقیه‌ی نمودار تابع f را نشان می‌دهد؟



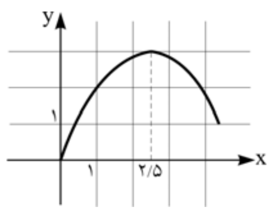
۱)


۲)


۳)


۴)


۸- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع فرد f رسم شده است. حاصل $3[f(-3)]+f(-1)+2f(2/5)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)



۱) ۸−
۲) ۵−
۳) ۲−
۴) ۲

تشخیص توابع فرد و توابع زوج

۹- کدام تابع زوج است؟

۱) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ ۲) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ ۳) $f(x)=x^6-x+1$ ۴) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+1}$

۱۰- کدام تابع فرد است؟

۱) $f(x)=x^3+x^2+x$ ۲) $f(x)=x^{15}+x^{13}+\ldots+x+1$
۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=|x-1|+|x+1|$

۱۱- اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع $y=ax^3+bx^2+dx+e$، آن‌گاه چند تا از تساوی‌های زیر لزوماً درست است؟

الف) $de=$ ب) $be=$ پ) $ab=$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲- اگر تابع $y=x^3+(m+n-4)x^2+nx+m-n$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل mn کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳- اگر تابع $y=x^4+3x^3+A(x+1)^3+Bx$ زوج باشد، آن‌گاه حاصل $A+B$ چقدر است؟

۱) ۶− ۲) ۳− ۳) صفر ۴) ۶

۱۴- مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار کدام تابع است؟

۱) $f(x)=x\sin^3 x$ ۲) $f(x)=\sin^3 x+\cos^2 x$
۳) $f(x)=|x-1|-|x+1|$ ۴) $f(x)=x^4+x$

۱۵- نمودار چند تا از توابع زیر نسبت به محور y ها متقارن است؟

الف) $f(x)=x\cos x$ ب) $f(x)=x\sin x+\cos 3x$
پ) $f(x)=(x+1)^4$ ت) $f(x)=|x-1|+|x+1|+|x|$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- چند تا از توابع زیر فرد هستند؟

الف) $f(x)=۲x+\sin ۲x$ ب) $f(x)=x^{۳}+\cos ۳x$

پ) $f(x)=\sqrt{۱-x}-\sqrt{۱+x}$ ت) $f(x)=x\sqrt{x}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷- چه تعداد از توابع زیر زوج هستند؟

الف) $f(x)=۱+\sin^{۲}x$ ب) $f(x)=\sin(۱+x^{۲})$ پ) $f(x)=\sin(۱+x)^{۲}$

ت) $f(x)=۱-\sin|x|$ ث) $f(x)=\sin(۱-x)+\sin(۱+x)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) فرد است. ۲) زوج است. ۳) نه زوج و نه فرد است. ۴) اگر $x <$ باشد، فرد است.

۱۹- اگر تابع $h(x)=(a-b)\sin x+(a^{۲}-۱)x^{۲}+(b+۱)\cos x$ فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱+x+x^{۲}}-\sqrt{۱-x+x^{۲}}$، حاصل $f(\frac{۱}{۲۰۰۸})+f(-\frac{۱}{۲۰۰۸})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲۰۰۸}}$ ۴) $۲-\frac{۱}{\sqrt{۲۰۰۸}}$

۲۱- تابع $f(x)=\frac{(۱+۳^{x})^{۲}}{۳^{x}}$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) نه زوج، نه فرد ۴) هم زوج، هم فرد

۲۲- تابع $f(x)=\frac{x}{۲-۲^{x}}-\frac{x}{۲}$، از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) هم زوج، هم فرد ۴) نه زوج، نه فرد

۲۳- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x+۲|+a|x-۲|$ زوج است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲٤- اگر تابع $f(x)=|x+a|-|x+۲|+b|x+۵|$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۲-

۲۵- تابع $f(x)=\sin(\log(\frac{۱-x}{۱+x}))$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) نه زوج، نه فرد ۴) هم زوج، هم فرد

۲٦- تابع غیرتهی $f(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{ax+۲}{x-۲})$ تابعی فرد است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ± ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۷- اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\log(ax+\sqrt{۱٦x^{۲}+۱})$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-۴,۱$ ۳) $۴,-۴$ ۴) $۴,۱$

زوج و فرد بودن توابع چندضابطه‌ای

۲۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq \\ -\sqrt{-x} & x<\end{cases}$، از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) فقط زوج ۲) فقط فرد ۳) نه زوج و نه فرد ۴) هم زوج و هم فرد

۲۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}+x+۱} & x> \\ a\sqrt{x^{۲}+bx+c} & x<\end{cases}$ فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۱-

۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases} x\,|x| & x\le -۱ \\ [x+۱]+[۱-x] & -۱<x<۱ \\ -x\,|x| & x\ge ۱ \end{cases}$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) زوج　　۲) فرد　　۳) نه زوج، نه فرد　　۴) هم زوج، هم فرد

۳۱- اگر $D_f=[\ ,b]$ و بدانیم: $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge \\ f(-x) & x< \end{cases}$، در این صورت تابع g از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) زوج　　۲) فرد

۳) ممکن است فرد باشد، ولی لزوماً فرد نیست.　　۴) ممکن است زوج باشد، ولی لزوماً زوج نیست.

* ۳۲- اگر $D_f=[\ ,b]$ و $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge \\ -f(-x) & x< \end{cases}$، در این صورت تابع g از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟ (f تابعی ثابت نیست)

۱) زوج　　۲) فرد

۳) ممکن است فرد باشد، ولی لزوماً فرد نیست.　　۴) ممکن است زوج باشد، ولی لزوماً زوج نیست.

۳۳- تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳} & x> \\ g(x) & x< \end{cases}$ یک تابع فرد است. ضابطه‌ی تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=-\dfrac{\sin x}{x^۲+۲x+۳}$　　۲) $g(x)=-\dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳}$

۳) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x^۲-۲x+۳}$　　۴) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x^۲+۲x+۳}$

* ۳٤- اگر $f(x)=\begin{cases} x\sin x & <x<\frac{\pi}{۲} \\ \frac{\pi}{۲}x & \frac{\pi}{۲}<x<۲ \\ g(x) & -۲<x< \end{cases}$ تابعی زوج باشد، ضابطه‌ی تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\frac{\pi}{۲} \\ -x\sin x & -\frac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$　　۲) $g(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\frac{\pi}{۲} \\ x\sin x & -\frac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$

۳) $g(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\frac{\pi}{۲} \\ x\sin x & -\frac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$　　۴) $g(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{۲}x & -۲<x<-\frac{\pi}{۲} \\ -x\sin x & -\frac{\pi}{۲}<x< \end{cases}$

مسائل ترکیبی درباره‌ی توابع زوج و فرد

۳۵- **اگر f دامنه‌ای متقارن نسبت به مبدأ داشته باشد، آن‌گاه چندتا از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟**

الف) اگر g زوج باشد، fog نیز زوج است.　　**ب) اگر g زوج باشد، gof نیز زوج است.**

پ) اگر g فرد باشد، fog نیز فرد است.

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۳٦- **اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد، چه تعداد از توابع زیر لزوماً فرد هستند؟**

الف) $h_۱(x)=f(x)g(x)$　　ب) $h_۲(x)=f(g(۲x))$　　پ) $h_۳(x)=g(f(x))$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) صفر

۳۷- **اگر توابع $f+g$ و $f-g$ فرد باشند و به ازای هر x، $f(x)\ne$ و $g(x)\ne$، آن‌گاه f و g چگونه‌اند؟**

۱) f و g هر دو زوج‌اند.　　۲) f زوج و g فرد است.　　۳) f فرد و g زوج است.　　۴) f و g هر دو فردند.

۳۸- اگر تابع $f(x)=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}+\tan x$ به صورت مجموع تابع زوج g و تابع فرد h نوشته شود، حاصل $h(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ۴) ۲

۳۹- تابع $f(x)=(x^3+\frac{1}{x^3})^9$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشته‌ایم. اگر تابع زوج را g بنامیم، آن‌گاه مقدار $g(100)$ کدام است؟

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) $100^3+\frac{1}{100^3}$ ۳) صفر ۴) $(100^3+100^{-3})^9$

۴۰- تابع $f(x)=\frac{\sin 2x-3}{\cos 2x+1}$ را به صورت مجموع دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ نوشته‌ایم که g زوج و h فرد است. مقدار $h(\frac{3\pi}{4})$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۲ ۴) ۲-

۴۱- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$، آن‌گاه تابع $g(x)=f(\frac{1-x^2}{1+x^2})$ از نظر زوج و فرد بودن چگونه است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) هم زوج، هم فرد ۴) نه زوج، نه فرد

* ۴۲- اگر برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم: $f(xy)=f(x)+f(y)$، تابع f از نظر زوج و فرد بودن چه وضعیتی دارد؟

۱) حتماً زوج است. ۲) حتماً فرد است. ۳) نه زوج است و نه فرد. ۴) می‌تواند زوج یا فرد باشد.

* ۴۳- درباره‌ی تابع $f:R\to R$ می‌دانیم: $f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y)$. تابع f از نظر زوج و فرد بودن چه وضعیتی دارد؟

۱) زوج است. ۲) فرد است. ۳) لزوماً نه زوج است، نه فرد. ۴) هم زوج است، هم فرد.

توابع صعودی و توابع نزولی

۴۴- کدام تابع، نزولی است؟

۱) $y=x+2$ ۲) $y=x^3-3$ ۳) $y=3-x^3$ ۴) $y=x$

۴۵- تابع حقیقی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1} & x\le -1\\ (x+1)^2+1 & x>-1\end{cases}$ در دامنه‌اش چه وضعیتی دارد؟

۱) صعودی اکید است.
۲) صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.
۳) نزولی است، ولی نزولی اکید نیست.
۴) نزولی اکید است.

۴۶- کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x\le 1\\ x^2-4 & x\ge 2\end{cases}$ درست است؟

۱) در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.
۲) در دامنه‌اش صعودی است.
۳) در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.
۴) در دامنه‌اش نزولی است.

۴۷- کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $y=x\sin x$ ۲) $y=\frac{x^2}{x^2+2}$ ۳) $y=x^3+3x^2+3x$ ۴) $y=x^3-3x$

۴۸- تابع $y=\sin 2x$ در فاصله‌های $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ و $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ به ترتیب کدام وضعیت را دارد؟

۱) نزولی- صعودی ۲) صعودی- نزولی ۳) صعودی- صعودی ۴) نزولی- نزولی

۴۹- حدود a برای آن‌که تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\ge\frac{5}{2}$ ۲) $2<a\le\frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

۵۰- تابع $f(x)=|x+2|+|x-4|$ در چند تا از فاصله‌های زیر نزولی است؟

الف) $[-7,-3]$ ب) $[-5,2]$ پ) $[-3,4]$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۱- تابع $f(x)=|x+m^۲-m|-|x+۶|$ بر دامنه‌ی خود نزولی است. حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $m \ge ۳$ یا $m \le -۲$ ۲) $m > ۲$ یا $m < -۳$ ۳) $-۲ \le m \le ۳$ ۴) $-۳ < m < ۲$

۵۲- برای کدام مقادیر m، تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲ & x \ge ۱ \\ x-۲m & x \le \end{cases}$ صعودی است؟

۱) $m \ge \frac{۱}{۲}$ ۲) $m > \frac{۱}{۲}$ ۳) $m < \frac{۱}{۲}$ ۴) $m \le \frac{۱}{۲}$

۵۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر f و g در D_g D_f صعودی اکید باشند، آن‌گاه $f+g$ صعودی اکید است.

۲) اگر f و g در D_g D_f هر دو صعودی و مثبت باشند، آن‌گاه fg صعودی است.

۳) اگر f صعودی باشد، آن‌گاه $-f$ صعودی است.

۴) اگر f صعودی و مثبت باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{f}$ نزولی است.

۵۴- اگر $f=\{(\ ,۱),(۱,۲),(۳,۵),(۵,m)\}$ و $\frac{۱}{f}$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه مقدار m کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۵۵- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و تابع g بر R_f اکیداً صعودی باشد، کدام گزاره درباره‌ی gof درست است؟

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است. ۳) تابع ثابت است. ۴) نه صعودی است و نه نزولی.

۵۶- چه تعداد از توابع زیر در دامنه‌ی خود صعودی اکیدند؟

الف) $y=\log(\sqrt{x})$ ب) $y=\log_۲(x^{-۳})$ پ) $y=\sqrt[۳]{x\sin x}$ ت) $y=۵^{\frac{۱}{\sqrt{x}}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۷- تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(x^۲-۲x-۳)$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,-۱)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(۳,+\infty)$

۵۸- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی R باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\frac{۱}{\sqrt[۴]{f(|x|)-f(۲)}}$ کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $R-(-۲,۲)$ ۴) $R-[-۲,۲]$

۵۹- f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی اعداد حقیقی است و $g(x)=\sqrt{f(|x+۳|)-f(|۳x+۱|)}$. دامنه‌ی g کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,-۱]$ $[۱,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱]$

۶۰- اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $(\ ,+\infty)$ باشد و بدانیم $f(۲a^۲+a+۱)<f(۳a^۲-۴a+۱)$، در این صورت برای a چند مقدار صحیح می‌توان یافت؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

توابع یک‌به‌یک

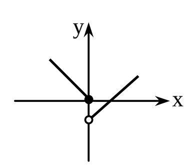
۶۱- اگر تابع $f=\{(۵,۲),(k,۱),(-۳,۱),(k+۸,a+۱)\}$ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مقدار $a+۲k$ کدام است؟

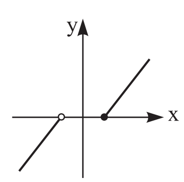
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۵

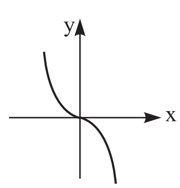
۶۲- اگر $f=\{(۳,۲),(۴m,۳),(a-۱,۲),(m^۲+a,۳)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه مقدار $a+m$ کدام است؟

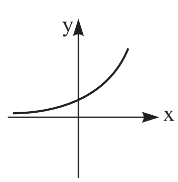
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۳- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱)


۲)


۳)


۴)


٦٤- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y = x^3 + 1$ ۲) $y = x^3 - x$ ۳) $y = x^4$ ۴) $y = \begin{cases} x & x \ge 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$

٦٥- کدام تابع حقیقی، یک‌به‌یک است؟

۱) $y = 3x\sin x$ ۲) $y = -x\cos x$ ۳) $y = (x-1)|x-1|$ ۴) $y = x^2|x|$

٦٦- چند تا از توابع زیر یک‌به‌یک هستند؟

الف) $y = \begin{cases} x & x > \\ x^2 & x \le \end{cases}$ **ب)** $y = \begin{cases} -x & x > \\ x^2 & x \le \end{cases}$ **پ)** $y = \begin{cases} -2x & x \le -1 \\ -x^2 - 2x & x > -1 \end{cases}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

٦٧- توابع زیر از R به R تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x^3 + x + 1$ ۲) $f(x) = x^4 - 2x^2$

۳) $f(x) = x^2 + x|x|$ ۴) $f(x) = x^3 - 2x^2$

٦٨- کدام تابع، یک‌به‌یک است؟

۱) $y = x^5 - x + 1$ ۲) $y = |x| + \sqrt[3]{x}$ ۳) $y = |x-2| + \sqrt{x}$ ۴) $y = |x+2| + \sqrt{x-1}$

٦٩- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x^3 + x^2 - a^2x + b$ ۲) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۳) $f(x) = x - \sqrt{x}$ ۴) $f(x) = |x| - 1$

٧٠- تابع $f(x) = x^2 - 4x + 10$ در بازه‌ی $[a, +\infty)$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

٧١- تابع $f(x) = (a+2)x^4 + x^3 + bx$ یک‌به‌یک است. حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -3 ۲) $-\dfrac{5}{2}$ ۳) -1 ۴) تابع هیچ‌گاه یک‌به‌یک نیست.

٧٢- برای چه مقادیری از m تابع $f(x) = \begin{cases} x + m & x \le 3 \\ mx + 2 & x > 3 \end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

۱) $m \in (\ ,\dfrac{1}{2}]$ ۲) $m \in [\dfrac{1}{2}, 1)$ ۳) $m \ge \dfrac{1}{2}$ ۴) $m \in R$

* **٧٣- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = a|x+1| + |x-1| + (2-a)x - a - 1$ یک‌به‌یک است؟**

۱) $a \ge \dfrac{1}{2}$ ۲) $a \le \dfrac{1}{2}$ ۳) $a > \dfrac{1}{2}$ ۴) $a < \dfrac{1}{2}$

* **٧٤- f تابعی اکیداً یکنوا است و می‌دانیم برای هر $x \in R$: $(fog)(x) = -x^2$. کدام گزینه درست است؟ ($D_f = D_g = R$)**

۱) f زوج است. ۲) f فرد است. ۳) g زوج است. ۴) g فرد است.

توابع پوشا

٧٥- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ در R چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک- پوشا ۲) غیر یک‌به‌یک- پوشا

۳) یک‌به‌یک- غیر پوشا ۴) غیر یک‌به‌یک- غیر پوشا

٧٦- کدام گزینه درباره‌ی تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x|x| \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک و پوشا است. ۲) فقط یک‌به‌یک است.

۳) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۴) فقط پوشا است.

۷۷- کدام گزینه درباره‌ی تابع $\begin{cases} f: Z \to Z \\ f(x) = |x| + ۱ \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک و پوشا است. ۲) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۳) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. ۴) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

۷۸- درباره‌ی تابع $\begin{cases} f: R^{+} \to (\ ,۱) \\ f(x) = \dfrac{x}{۱ + |x|} \end{cases}$ کدام گزینه درست است؟

۱) هم یک‌به‌یک است، هم پوشا. ۲) یک‌به‌یک نیست، پوشا است. ۳) یک‌به‌یک است، پوشا نیست. ۴) یک‌به‌یک نیست، پوشا نیست.

۷۹- کدام گزینه درباره‌ی تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = |x - ۲| - x \end{cases}$ درست است؟

۱) یک‌به‌یک است، پوشا نیست. ۲) یک‌به‌یک نیست، پوشا است. ۳) یک‌به‌یک و پوشا است. ۴) نه یک‌به‌یک است نه پوشا.

۸۰- اگر $f(x) = x + ۱$ و $g(x) = ۶x$، آن‌گاه تابع $f \times g$، چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. ۲) پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.
۳) نه یک‌به‌یک است نه پوشا. ۴) یک‌به‌یک و پوشا است.

۸۱- اگر $f(x) = \dfrac{x}{x - ۱}$، آن‌گاه fof چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک- پوشا ۲) یک‌به‌یک- غیر پوشا ۳) غیر یک‌به‌یک- پوشا ۴) غیر یک‌به‌یک- غیر پوشا

۸۲- تابع $\begin{cases} f: R - \{۲\} \to R - \{۳\} \\ f(x) = \dfrac{ax - ۴}{۳x - b} \end{cases}$ یک‌به‌یک و پوشا است. در این صورت دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(۶,۹)$ ۲) $(۹,۶)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(۶,۶)$

گزیده‌ی سؤالات آزمون‌های سراسری و آزاد سال ۸۶ به بعد

۸۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۱ & x \geq \\ ۱ - x^{۲} & x < \end{cases}$، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگونه است؟ (سراسری- ۸۹)

۱) پوشا - یک‌به‌یک ۲) غیرپوشا - یک‌به‌یک ۳) پوشا - غیر یک‌به‌یک ۴) غیرپوشا - غیر یک‌به‌یک

۸٤- کدام تابع یک‌به‌یک است؟ (آزاد-۸٦)

۱) $y = x + |۲x|$ ۲) $y = x + |x|$ ۳) $y = x - |x|$ ۴) $y = \sqrt{x} + |x|$

۸۵- کدام تابع زوج است؟ (آزاد-۸٦)

۱) $y = \begin{cases} x^{۴} - x + ۱ & x > \\ x^{۴} + x + ۱ & x < \end{cases}$ ۲) $y = \dfrac{۳x^{۳} + x^{۲}}{۲x + ۱}$

۳) $y = \begin{cases} x^{۲} + x + ۲ & x > \\ x^{۲} - x - ۲ & x < \end{cases}$ ۴) $y = |x - ۱| - |x + ۱| + |x|$

۸٦- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ۲x + ۳ & x \geq ۴ \\ ۲|x + ۳| + a|x + b| & -۴ < x < ۴ \\ cx^{۲} + dx + e & x \leq -۴ \end{cases}$ تابعی زوج باشد، $a + b + c + d + e$ کدام است؟ (آزاد- ۸۷)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x^{۲} + ۲x} + ۴x + ۱ & x > \\ \sqrt[۳]{ax^{۲} + bx} + cx + d & x < \end{cases}$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه حاصل $a + b + c - d$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

فصل ۲

انواع توابع (زوج و فرد، صعودی و نزولی، یک‌به‌یک و پوشا)

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۱) A

تابع حقیقی f را در صورتی زوج می‌گویند که دو شرط زیر در آن برقرار باشد:
۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $-x \in D_f$ (اصطلاحاً دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن باشد.)
۲) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$

تابع زوج به ورودی‌های قرینه، مقادیر یکسان نسبت می‌دهد. طبق فرض $f(۱) = b$ ، $f(-۱) = a + ۱$ ، $f(۲) = b + ۵$ و $f(-۲) = ۱$، بنابراین:

$$\begin{cases} a + ۱ = b \\ ۱ = b + ۵ \end{cases} \Rightarrow b = -۴ \ , \ a = -۵ \Rightarrow ab = ۲۰$$

۲- گزینه‌ی (۳) A

تابع حقیقی f را در صورتی فرد می‌گویند که دو شرط زیر در آن برقرار باشد:
۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $-x \in D_f$ (اصطلاحاً دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن باشد.)
۲) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$

تابع فرد به ورودی‌های قرینه، مقادیر قرینه نسبت می‌دهد. طبق فرض $f(۲) = b + c$ ، $f(-۲) = ۷$ ، $f(-۱) = ۲$ و $f(c - b) = -۲$، پس:

$$\begin{cases} b + c = -۷ \\ c - b = ۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۴ \ , \ c = -۳$$

همچنین طبق فرض $f(\ ) = a$، و چون f فرد است می‌دانیم: $f(\ ) = -f(\ )$ (در تعریف تابع فرد به جای x، عدد صفر را قرار دهید)، بنابراین:

$$a = -a \Rightarrow ۲a = \ \Rightarrow a = \ \xrightarrow[c=-۳]{b=-۴} ۲a + b - ۲c = -۴ + ۶ = ۲$$

نکته: در هر تابع فرد f، اگر $\ \in D_f$ ، آن‌گاه: $f(\ ) = \ $
اثبات این نکته مانند روش به‌دست آوردن مقدار a، در راه‌حل بالا است.

۳- گزینه‌ی (۳) A چون تابع فرد است و $f(\ ) = c$، پس $c = \ $. همچنین چون دامنه‌ی تابع باید نسبت به مبدأ متقارن باشد، پس یکی از مقادیر d و e برابر ۲- و دیگری برابر ۱- است. همچنین اگر $x \in D_f$، آن‌گاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرد } f \Rightarrow f(-x) = -f(x) \\ \text{زوج } f \Rightarrow f(-x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = \ $$

پس خروجی‌های تابع فقط می‌توانند مقدار صفر را داشته باشند، یعنی $a = b = g = \ $. به این ترتیب مجموع مقادیر مجهول $-۳ = -۱ - ۲$ می‌شود.

نکته: اگر f تابعی غیرتهی و با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ باشد، فقط در حالتی هم زوج است و هم فرد که تابع ثابت با مقدار صفر باشد.

۴- گزینه‌ی (۱) B گزاره‌ی (الف) فقط وقتی درست است که بدانیم $\ \in D_f$ ، در غیر این صورت نادرست است. گزاره‌ی (ب) نیز فقط وقتی درست است که بدانیم دامنه‌ی تابع f نسبت به مبدأ متقارن است. ولی گزاره‌ی (پ) همواره درست است. زیرا از شرط $f(-x) = -f(x)$، شرط اول توابع فرد نیز حاصل می‌شود (این شرط که اگر $x \in D_f$، آن‌گاه $-x \in D_f$).

۵- گزینه‌ی (۴) B در مورد (الف) دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن نیست، پس نه زوج است و نه فرد. در مورد (ت) تابع ثابت صفر با دامنه‌ی متقارن نسبت به مبدأ داریم، پس تابع هم زوج است و هم فرد.
حال به راحتی می‌توانیم نشان بدهیم که در مورد (ب) داریم $f(-x) = -f(x)$ و در مورد (پ) داریم: $f(-x) = f(x)$، پس (ب) تابعی فرد و (پ) تابعی زوج را نشان می‌دهد.

A **۶- گزینه‌ی (۲)**

> **نکته:** ۱) نمودار هر تابع زوج، نسبت به محور yها متقارن است.
> ۲) نمودار هر تابع فرد، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

باید بقیه‌ی نمودار قرینه‌ی بخش اولیه نسبت به مبدأ مختصات باشد. پس گزینه‌ی (۲) نمودار درست را نشان می‌دهد.

A **۷- گزینه‌ی (۲)** نمودار هر تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است، پس باید بقیه‌ی نمودار قرینه‌ی بخش اولیه نسبت به محور yها باشد.

B **۸- گزینه‌ی (۲)** با توجه به نمودار $f(۱) = ۲$، $f(۲/۵) = ۳$ و $f(۳) = ۲/...$ (یعنی $۲ < f(۳) < ۳$). از فرد بودن تابع f نتیجه می‌گیریم:

$$f(-۳) = -۲/... \ , \ f(-۱) = -۲ \Rightarrow ۳[f(-۳)] + f(-۱) + ۲f(۲/۵) = ۳ \times (-۳) - ۲ + ۲ \times ۳ = -۵$$

A **۹- گزینه‌ی (۴)** در گزینه‌های (۱) و (۲) به وضوح داریم $f(-x) = -f(x)$، پس با تابعی فرد مواجه‌ایم. در گزینه‌ی (۳) داریم $f(۱) = ۱$ و $f(-۱) = ۳$، پس تابع نه زوج است و نه فرد. در گزینه‌ی (۴) دامنه‌ی تابع نسبت به مبدأ متقارن است و داریم $f(-x) = \frac{x^۲ - ۱}{x^۴ + ۱} = f(x)$، پس تابع زوج است.

A **۱۰- گزینه‌ی (۳)** در گزینه‌ی (۱) داریم $f(۱) = ۳$ و $f(-۱) = -۱$، پس تابع نه زوج است و نه فرد. در گزینـه‌ی (۲) داریـم $f(\ ) = ۱ \neq$ ، پس تابع فرد نیست. در گزینه‌ی (۳) داریم:

$$f(-x) = -x|-x| \xrightarrow{|-x|=|x|} f(-x) = -x|x| = -f(x)$$

پس تابع f فرد است. در گزینه‌ی (۴) هم علاوه بر امتحان کردن $f(\ )$، می‌توانید با نمودار گلدان شکل تابع نشان دهید تابع فرد نیسـت (در واقـع تابع زوج است).

A **۱۱- گزینه‌ی (۳)**

> **نکتـه:** اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، برای فرد بودن تابع P، باید تنها جملات با درجه‌ی فرد x در P حضور داشته باشند، و برای زوج بودن P، تنها جملات با درجه‌ی زوج x. حالت خاص $P(x) =$ هم زوج و هم فرد است.

باید تابع فرد باشد، پس باید تنها جملات با درجه‌ی فرد در تابع حضور داشته باشند، یعنی باید $b = e =$ ، پس هر سه گزاره‌ی $de =$ ، $be =$ و $ab =$ لزوماً درست‌اند.

A **۱۲- گزینه‌ی (۲)** باید چندجمله‌ای شامل فقط جملات با توان‌های فرد x باشد، پس باید:

$$m + n - ۴ = m - n = \ \Rightarrow m = n = ۲ \Rightarrow mn = ۴$$

B **۱۳- گزینه‌ی (۴)** ضابطه‌ی تابع را بر حسب درجات x مرتب می‌کنیم:

$$y = x^۴ + ۳x^۳ + A(x+۱)^۳ + Bx = x^۴ + (A+۳)x^۳ + ۳Ax^۲ + (۳A+B)x + A$$

برای آن‌که تابع فوق زوج باشد، باید ضریب جمله‌های با درجه‌ی فرد آن صفر باشد. یعنی:

$$A + ۳ = ۳A + B = \ \Rightarrow A = -۳, B = ۹ \Rightarrow A + B = ۶$$

B **۱۴- گزینه‌ی (۳)** باید ببینیم کدام تابع فرد است. در ۴ گزینه داریم $D_f = R$ و در گزینه‌ی (۳):

$$f(-x) = |-x-۱| - |-x+۱| \xrightarrow{|-u|=|u|} f(-x) = |x+۱| - |x-۱| \Rightarrow f(-x) = -(|x-۱| - |x+۱|) = -f(x)$$

پس تابع گزینه‌ی (۳) فرد است. توابع گزینه‌های (۲) و (۴) نه زوج هستند و نه فرد. تابع گزینه‌ی (۱) نیز زوج است، زیرا:

$$f(-x) = -x\sin^۳(-x) = -x \times (-\sin x)^۳ = x\sin^۳ x = f(x)$$

B **۱۵- گزینه‌ی (۲)** باید ببینیم چند تا از توابع موردنظر زوج هستند. مورد (پ) به وضوح تابعی نه زوج و نه فرد را بیان می‌کند. مورد (الف) تابعی فرد را نشان می‌دهد و برای مورد (ب) داریم:

$$f(-x) = -x\sin(-x) + \cos(-۳x) \xrightarrow[\cos(-\alpha)=\cos\alpha]{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha} f(-x) = x\sin x + \cos۳x = f(x)$$

پس مورد (ب) تابعی زوج است. مورد (ت) نیز تابعی زوج است، زیرا:

$$f(-x) = |-x-۱| + |-x+۱| + |-x| \xrightarrow{|-u|=|u|} f(-x) = |x+۱| + |x-۱| + |x| = f(x)$$

B **۱۶- گزینه‌ی (۲)** مورد (الف) تابعی فرد را نشان می‌دهد، زیرا:

$$f(-x) = -۲x + \sin(-۲x) \xrightarrow{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha} f(-x) = -(۲x + \sin۲x) = -f(x)$$

مورد (ب) تابعی نه زوج و نه فرد را نشان می‌دهد ($f(\ ) \neq$)، در مورد (ت) نیز دامنه $x \geq$ و غیرمتقارن است، پس باز هم تـابعی نـه زوج و نـه فرد را بیان می‌کند. تابع گزینه‌ی (پ) فرد است، زیرا اولاً دامنه‌ی آن $[-۱,۱]$ و متقارن است، ثانیاً داریم:

$$f(-x) = \sqrt{۱+x} - \sqrt{۱-x} = -(\sqrt{۱-x} - \sqrt{۱+x}) = -f(x)$$

B **۱۷- گزینه‌ی (۴)** تنها تابع غیر زوج، تابع مورد (پ) است. در بقیه‌ی توابع به راحتی می‌توانید با تغییر x به $-x$ نشان بدهید که ضابطه‌ی تابع فرقی نمی‌کند!

B **۱۸- گزینه‌ی (۲)** ضابطه‌ی $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم و با $f(x)$ مقایسه می‌کنیم:

$$f(-x)=\cos(\sin(-x))+\sin(\cos(-x))=\cos(-\sin x)+\sin(\cos x)=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

B **۱۹- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** توابع $y=x^۲$ و $y=\cos x$ به تنهایی زوج و تابع $y=\sin x$ فرد است. پس در ضابطه‌ی h باید ضریب دوتای اول صفر باشد تا h نیز فرد شود. بنابراین:

$\begin{cases} b+۱= \\ a^۲-۱= \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-۱ \\ a=\pm۱\end{cases}\Rightarrow a+b=$ یا $-۲ \Rightarrow$ ۲ مقدار مختلف

راه دوم: چون h فرد است و $\in D_h$ ، پس $h(\ )=$ ، بنابراین $b+۱=$ ، پس $b=-۱$ و $h(x)=(a+۱)\sin x+(a^۲-۱)x^۲$. حال از فرد بودن h داریم:

$$h(-x)=-h(x)\Rightarrow (a+۱)\sin(-x)+(a^۲-۱)x^۲=-(a+۱)\sin x-(a^۲-۱)x^۲\Rightarrow ۲(a^۲-۱)x^۲=$$

چون تساوی بالا باید برای هر $x\in R$ برقرار باشد، پس $a^۲-۱=$ و ادامه‌ی راه‌حل مانند راه قبل می‌شود.

B **۲۰- گزینه‌ی (۱)** به وضوح $D_f=R$، حال نشان می‌دهیم تابع f فرد است:

$$f(-x)=\sqrt{۱-x+x^۲}-\sqrt{۱+x+x^۲}=-f(x)$$

پس برای هر $x\in R$ (و از جمله $x=\frac{۱}{۲۰۰۸}$) داریم: $f(x)+f(-x)=$

B **۲۱- گزینه‌ی (۱)** چون $f(x)$ تابع ثابت صفر نیست، پس گزینه‌ی (۴) نادرست است. حال داریم:

$$f(x)=\frac{۱+۲\times۳^x+۳^{۲x}}{۳^x}=\frac{۱}{۳^x}+۲+۳^x=۳^{-x}+۳^x+۲\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

C **۲۲- گزینه‌ی (۴)** دقت کنید که معادله‌ی $۲-۲^x=$ فقط جواب $x=۱$ را دارد، پس $D_f=R-\{۱\}$ و نسبت به مبدأ غیرمتقارن است. بنابراین تابع نه زوج است و نه فرد.

B **۲۳- گزینه‌ی (۳)** باید $f(-x)=f(x)$ پس داریم:

$$f(-x)=|-x+۲|+a|-x-۲|\xrightarrow{|u|=|-u|}f(-x)=|x-۲|+a|x+۲|$$

عبارت بالا برای هر $x\in R$ باید با عبارت $f(x)=|x+۲|+a|x-۲|$ مساوی باشد، به وضوح $a=۱$.

B **۲۴- گزینه‌ی (۴)** باید $f(-x)=-f(x)$. داریم:

$$f(-x)=|-x+a|-|-x+۲|+b|-x+۵|\xrightarrow{|u|=|-u|}f(-x)=|x-a|-|x-۲|+b|x-۵|$$

با مقایسه‌ی ضابطه‌ی بالا با $-f(x)=-|x+a|+|x+۲|-b|x+۵|$ نتیجه می‌گیریم $|x-a|=|x+۲|$، پس $a=-۲$. همچنین داریم: $b|x-۵|=-b|x+۵|$، پس $b=$. بنابراین $a+b=-۲$.

C **۲۵- گزینه‌ی (۲)** داریم $D_f=(-۱,۱)$ که متقارن است، حال ضابطه‌ی $f(-x)$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(-x)=\sin(\log(\frac{۱+x}{۱-x}))=\sin(-\log(\frac{۱-x}{۱+x}))=-\sin(\log(\frac{۱-x}{۱+x}))=-f(x)$$

C **۲۶- گزینه‌ی (۲)** باید $f(-x)+f(x)=$ ، بنابراین:

$$\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{-ax+۲}{-x-۲})+\log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{ax+۲}{x-۲})= \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{ax-۲}{x+۲}\times\frac{ax+۲}{x-۲})= \Rightarrow \frac{(ax)^۲-۴}{x^۲-۴}=۱\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

به ازای $a=-۱$، تابع به $f(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}(-۱)$ تبدیل می‌شود که تعریف نشده است!

C **۲۷- گزینه‌ی (۳)** باید تابع فرد باشد، در نتیجه $f(-x)+f(x)=$ ، بنابراین:

$$\log(-ax+\sqrt{۱۶x^۲+۱})+\log(ax+\sqrt{۱۶x^۲+۱})= \Rightarrow(-ax+\sqrt{۱۶x^۲+۱})(ax+\sqrt{۱۶x^۲+۱})=۱$$

$$\Rightarrow ۱۶x^۲+۱-a^۲x^۲=۱\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow a=\pm۴$$

به راحتی می‌توانید نشان دهید که در هر دو حالت $a=\pm۴$، داریم $D_f=R$.

B ۲۸- **گزینه‌ی (۲)** با فرض $x<0$ داریم $-x>0$ و با توجه به ضابطه‌ها می‌توانیم بنویسیم: $f(-x)=-\sqrt{-(-x)}=-\sqrt{x}=-f(x)$

به همین ترتیب با فرض $x>0$ داریم $-x<0$ و با توجه به ضابطه‌ها $f(-x)=-f(x)$، پس تابع فرد است.

B ۲۹- **گزینه‌ی (۱)** برای $x>0$ شرط $f(-x)=-f(x)$ را بررسی می‌کنیم: (داریم $-x<0$)

$$a\sqrt{(-x)^2+b(-x)}+c=-\sqrt{x^2+x}-1\Rightarrow a\sqrt{x^2-bx}+c=-\sqrt{x^2+x}-1$$

برای آن‌که دو طرف تساوی برای تمام مقادیر حقیقی x مساوی باشند، باید داشته باشیم: $c=-1$، $a=-1$ و $b=-1$

C ۳۰- **گزینه‌ی (۱)** اگر $x\le -1$ داریم: $f(x)=x|x|$ و چون $-x\ge 1$ داریم:

$$f(-x)=-(-x)|-x|=x|x|$$

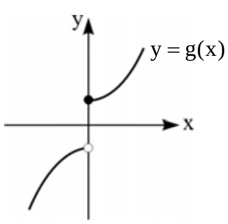
به همین ترتیب حالت $x\ge 1$ و $-x\le -1$ بررسی می‌شود. حال برای $-1<x<1$ داریم $-1<-x<1$ و ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=[x]+[-x]+2$ بنویسیم، پس $f(-x)=f(x)$، در نتیجه تابع زوج است.

C ۳۱- **گزینه‌ی (۱)** اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $-x\le 0$ و داریم:

$$\begin{cases}g(x)=f(x)\\ g(-x)=f(-(-x))=f(x)\end{cases}\Rightarrow g(-x)=g(x)$$

به همین ترتیب برای $x<0$ ثابت می‌شود $g(-x)=g(x)$، پس تابع g زوج است.

D ۳۲- **گزینه‌ی (۳)** اگر $x>0$، آن‌گاه $-x<0$ و داریم:



$$\begin{cases}g(x)=f(x)\\ g(-x)=-f(-(-x))=-f(x)\end{cases}\Rightarrow g(-x)=-g(x)$$

به همین ترتیب برای $x<0$ داریم $g(-x)=g(x)$. ولی نمی‌توانیم بگوییم g تابعی فرد است، زیرا باید $g(0)=0$، ولی $g(0)=f(0)$ و تنها در حالتی g فرد است که $f(0)=0$. برای مثال نقض $f(x)=x^2+1$ را با فرض $D_f=[0,1]$ در نظر بگیرید.

$$g(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 0\\ -x^2-1 & x<0\end{cases}$$

C ۳۳- **گزینه‌ی (۴)** برای $x<0$ داریم $-x>0$، در نتیجه $f(-x)=g(-x)$. حال از فرد بودن f نتیجه می‌گیریم:

$$f(-x)=-f(x)\Rightarrow g(-x)=-\frac{\sin x}{x^2-2x+3}\xrightarrow{t=-x}g(t)=-\frac{\sin(-t)}{(-t)^2-2(-t)+3}=\frac{\sin t}{t^2+2t+3}$$

D ۳۴- **گزینه‌ی (۳)** اگر $0<x<2$، آن‌گاه $-2<-x<0$، پس $f(-x)=g(-x)$. از زوج بودن تابع f داریم:

$$f(-x)=f(x)\Rightarrow g(-x)=\begin{cases}x\sin x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}x & \frac{\pi}{2}<x<2\end{cases}\xrightarrow{t=-x}g(t)=\begin{cases}(-t)\sin(-t) & -\frac{\pi}{2}<t<0\\ \frac{\pi}{2}(-t) & -2<t<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(t)=\begin{cases}t\sin t & -\frac{\pi}{2}<t<0\\ -\frac{\pi}{2}t & -2<t<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

B ۳۵- **گزینه‌ی (۱)** اگر g زوج باشد، داریم $g(-x)=g(x)$، حال می‌توانیم بنویسیم:

$$(fog)(-x)=f(g(-x))\xrightarrow{g(-x)=g(x)}f(g(x))=(fog)(x)$$

پس $(fog)(-x)=(fog)(x)$، بنابراین fog نیز زوج است. ولی زوج بودن gof، نامشخص است، زیرا $(gof)(-x)=g(f(-x))$ و درباره‌ی $f(-x)$ اطلاعی نداریم. پس گزاره‌ی (الف) درست و (ب) نادرست است. گزاره‌ی (پ) نیز لزوماً درست نیست، زیرا از فرد بودن g نتیجه می‌گیریم: $(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))$ که چون درباره‌ی f اطلاعی نداریم، نمی‌توانیم آن‌را به $-f(g(x))$ ربط دهیم.

B ۳۶- **گزینه‌ی (۱)** در هر تابع $h(-x)$ را به $h(x)$ ربط می‌دهیم:

الف) $h_1(-x)=f(-x)g(-x)\xrightarrow[\text{g فرد}]{\text{f زوج}}f(x)\times(-g(x))=-f(x)g(x)=-h_1(x)$ فرد

ب) $h_2(-x)=f(g(-2x))\xrightarrow{\text{g فرد}}f(-g(2x))\xrightarrow{\text{f زوج}}f(g(2x))=h_2(x)$ زوج

پ) $h_3(-x)=g(f(-x))\xrightarrow{\text{f زوج}}g(f(x))=h_3(x)$ زوج

B **۳۷- گزینه‌ی (۴)** مجموع و تفاضل دو تابع فرد، همواره فرد است. پس $۲f=(f+g)+(f-g)$ و $۲g=(f+g)-(f-g)$ هر دو فردند، بنابراین f و g نیز فردند.

B **۳۸- گزینه‌ی (۴)**

> **نکته:** هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به صورت منحصر به فرد به شکل مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. در واقع:
>
> $$g(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x)) \quad , \quad h(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))$$
>
> که g زوج و h فرد است و $f(x)=g(x)+h(x))$

می‌توانیم با توجه به نکته‌ی بالا تابع h را تشکیل دهیم، ولی با توجه به توابع مثلثاتی بدیهی است که $h(x)=\sin ۲x+\tan x$ فرد و $g(x)=\cos\frac{x}{۲}$ زوج است. بنابراین: $h(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۲}+\tan\frac{\pi}{۴}=۲$

B **۳۹- گزینه‌ی (۳)** چون f خود تابعی فرد است (چرا؟)، پس در رابطه‌ی $f(x)=\underbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x))}_{g(x)}+\underbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))}_{h(x)}$، قسمت زوج یعنی $g(x)$ تابع ثابت صفر است. پس: $g(۱۰۰)=$

C **۴۰- گزینه‌ی (۴)** تابع فرد h ضابطه‌ی زیر را دارد:

$$h(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))=\frac{۱}{۲}(\frac{\sin ۲x-۳}{\cos ۲x+۱}+\frac{\sin ۲x+۳}{\cos ۲x+۱})=\frac{۲\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}\Rightarrow h(\frac{۳\pi}{۴})=\frac{۲\times(-۱)}{۱+}=-۲$$

B **۴۱- گزینه‌ی (۳)** واضح است که $D_f=[۱,+\infty)$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\geq ۱\Rightarrow ۱-x^۲\geq ۱+x^۲\Rightarrow ۲x^۲\leq \quad \Rightarrow x=$$

پس فقط $x=$ در دامنه‌ی تابع g حضور دارد و داریم $g(\ )=f(۱)=$، بنابراین g هم زوج است و هم فرد.

D **۴۲- گزینه‌ی (۱)** در معادله‌ی فرض سؤال یک‌بار به جای x ، y و یک‌بار $-x$ قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x^۲)=f(x)+f(x) \\ f(x^۲)=f(-x)+f(-x)\end{array}\right\}\Rightarrow ۲f(x)=۲f(-x)\Rightarrow f(x)=f(-x) \quad \text{زوج}$$

D **۴۳- گزینه‌ی (۲)** با جای‌گذاری $-x$ به جای x در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$f(x^۲+y^۲)=-xf(-x)+yf(y)\xrightarrow{\text{فرض}}-xf(-x)+yf(y)=xf(x)+yf(y)\Rightarrow xf(x)+xf(-x)=$$

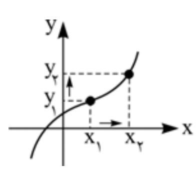
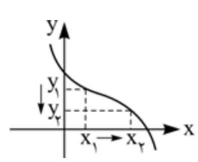
$$\Rightarrow x(f(x)+f(-x))=$$

بنابراین برای هر $x\neq$ داریم $f(-x)=-f(x)$. حال برای $x=$ با جای‌گذاری $x=y=$ در معادله داریم:

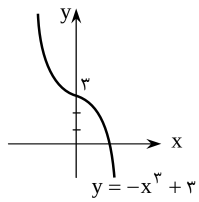
$$f(\ )=\ +\ =$$

بنابراین تابع قطعاً فرد است.

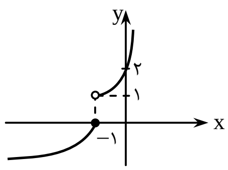
A **۴۴- گزینه‌ی (۳)**

> ## تعریف توابع یکنوا
>
> 
>
>
> ۱) تابع حقیقی f را «اکیداً صعودی» می‌گویند، اگر برای هر $x_۱ , x_۲ \in D_f$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم:
>
> $f(x_۱)<f(x_۲)$
>
> در نمودار این توابع با افزایش x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد (یعنی با پیش رفتن در جهت مثبت محور x ها نمودار بالا می‌رود).
>
> 
>
>
> ۲) تابع حقیقی f را «اکیداً نزولی» می‌گویند، اگر برای هر $x_۱ , x_۲ \in D_f$ که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم:
>
> $f(x_۱)>f(x_۲)$
>
> در نمودار این توابع با افزایش x، مقدار y کاهش می‌یابد (یعنی با پیش رفتن در جهت مثبت محور x ها نمودار پایین می‌رود).
>
> ۳) اگر در نامساوی‌های بالا (یعنی $f(x_۱)<f(x_۲)$ یا $f(x_۱)>f(x_۲)$)، حالت تساوی هم بتواند رخ دهد (یعنی $f(x_۱)\leq f(x_۲)$ یا $f(x_۱)\geq f(x_۲)$)، آن‌گاه به این توابع «صعودی» یا «نزولی» می‌گویند.
>
> ۴) توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را «اکیداً یکنوا» و توابع صعودی یا نزولی را «یکنوا» نیز می‌گویند.

با رسم نمودار تابع $y = ۳ - x^۳$ می‌بینیم که اکیداً نزولی است. در این نمودار با پیش رفتن در جهت مثبت x ها، نمودار پایین می‌رود. در توابع گزینه‌های دیگر، با رسم نمودار با توابعی اکیداً صعودی مواجه می‌شویم.

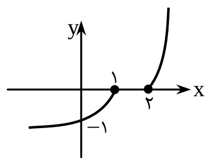


A **۱۴۵- گزینه‌ی (۱)** در توابع چند ضابطه‌ای برای تشخیص نزولی یا صعودی بودن بهتر است از رسم نمودار کمک بگیریم. با رسم نمودار f دیده می‌شود که f اکیداً صعودی است.



B **۱۴۶- گزینه‌ی (۲)** نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

همان‌طور که مشخص است تابع در بازه‌های $(-\infty,۱]$ و $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است. ولی به دلیل این‌که $f(۱) = f(۲) =$ ، در دامنه‌اش اکیداً صعودی نیست. البته می‌توانیم بگوییم صعودی است.

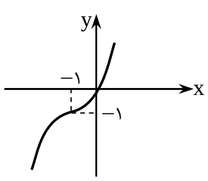


B **۱۴۷- گزینه‌ی (۳)** در گزینه‌ی (۳) ضابطه‌ی تابع به صورت زیر قابل نوشتن است:

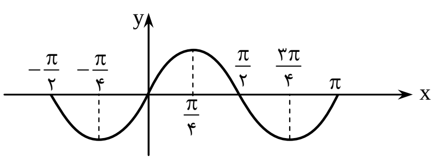
$$y = (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱) - ۱ = (x+۱)^۳ - ۱$$

از نمودار این تابع مشخص است که تابع اکیداً صعودی است.

در گزینه‌های دیگر می‌توانید با مثال نقض نشان بدهید که تابع اکیداً صعودی نیست. مثلاً در گزینه‌ی (۱) مقدار تابع به ازای $x =$ و $x = ۲\pi$ یکسان است، پس با آن‌که $< ۲\pi$ ، ولی $f(\ ) \not< f(۲\pi)$. به همین ترتیب گزینه‌های دیگر رد می‌شود.



B **۱۴۸- گزینه‌ی (۲)** با توجه به نمودار واضح است که ابتدا در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ مقدار تابع افزایش و سپس در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴}]$ کاهش می‌یابد.

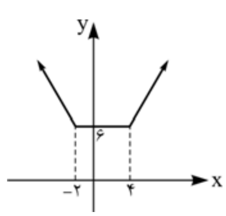


B **۱۴۹- گزینه‌ی (۱)** اگر $a = ۲$ با یک تابع درجه‌ی یک نزولی اکید مواجه‌ایم، پس $a \neq ۲$. در این صورت نمودار تابع یک سهمی به شکل یا است. برای آن‌که این نمودار در فاصله‌ی $(۱,+\infty]$ صعودی باشد، باید اولاً تقعر آن روبه بالا باشد، ثانیاً محور تقارن آن قبل از $x = ۱$ باشد.

بنابراین اولاً باید $a - ۲ >$ ، ثانیاً $\frac{۱}{۲(a-۲)} \leq ۱$، داریم:

$$\frac{۱}{۲(a-۲)} \leq ۱ \xrightarrow{a-۲>} ۱ \leq ۲(a-۲) \Rightarrow ۲a \geq ۵ \Rightarrow a \geq \frac{۵}{۲} \xrightarrow{a>۲} a \geq \frac{۵}{۲}$$

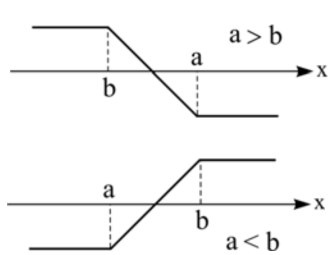
B **۱۵۰- گزینه‌ی (۳)** با توجه به نمودار گلدان شکل روبه‌رو، تابع در فاصله‌ی $(-\infty,-۲)$ نزولی اکید و در فاصله‌ی $(۴,+\infty)$ صعودی اکید است. در فاصله‌ی $(-۲,۴)$ نیز تابع ثابت است که هم صعودی و هم نزولی است. بنابراین در هر سه فاصله‌ی موردنظر، تابع نزولی است (البته فقط در فاصله‌ی $[-۷,-۳]$ نزولی اکید است).



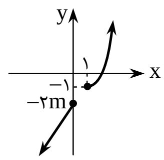
B **۱۵۱- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ به یکی از دو شکل مقابل است. پس برای آن‌که تابع نزولی باشد، باید $a > b$. در ضابطه‌ی تابع فرض شرط $a > b$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$-(m^۲ - m) > -۶ \Rightarrow m^۲ - m < ۶ \Rightarrow (m-۳)(m+۲) < \ \Rightarrow -۲ < m < ۳$$

در ضمن حالت $a = b$ به تابع ثابت صفر منجر می‌شود که هم نزولی است و هم صعودی، پس پاسخ نهایی $-۲ \leq m \leq ۳$ می‌شود.



B **۵۲- گزینه‌ی (۱)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای آن‌که تابع صعودی باشد، باید عرض نقطه‌ی توپر روی محور y ها از عرض نقطه‌ی $(۱,-۱)$ بیش‌تر نباشد. بنابراین: $-۲m \le -۱ \Rightarrow m \ge \frac{۱}{۲}$



B **۵۳- گزینه‌ی (۳)** اگر تابع f صعودی باشد، آن‌گاه $-f$ نزولی است. زیرا اگر $x_۱ < x_۲$ را در دامنه‌ی f در نظر بگیریم، داریم:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x_۱) \le f(x_۲) \Rightarrow -f(x_۱) \ge -f(x_۲) \Rightarrow \text{نزولی } -f$$

پس گزینه‌ی (۳) نادرست است. سه گزینه‌ی دیگر درست‌اند. مثلاً اگر f و g هر دو در D_f D_g صعودی اکید باشند، با در نظر گرفتن $x_۱ < x_۲$ در این دامنه‌ی مشترک داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{صعودی اکید } f} f(x_۱) < f(x_۲) \\ \xrightarrow{\text{صعودی اکید } g} g(x_۱) < g(x_۲) \end{cases} \Rightarrow f(x_۱) + g(x_۱) < f(x_۲) + g(x_۲)$$

پس $(f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$، در نتیجه $f+g$ نیز صعودی اکید است. گزینه‌های دیگر را خودتان اثبات کنید.

B **۵۴- گزینه‌ی (۳)** چون $f >$ ، پس برای آن‌که $\frac{۱}{f}$ نزولی اکید باشد، باید f صعودی اکید شود بنابراین باید $m > ۵$.

B **۵۵- گزینه‌ی (۲)** $x_۱ < x_۲$ را در دامنه‌ی gof درنظر می‌گیریم. داریم:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{نزولی اکید } f} f(x_۱) > f(x_۲) \xrightarrow{\text{صعودی اکید } g} g(f(x_۱)) > g(f(x_۲)) \Rightarrow \text{نزولی اکید } gof$$

نکته: درباره‌ی وضعیت یکنوایی ترکیب توابع می‌توانیم قاعده‌ی جالب زیر را بیان کنیم.
فرض کنید صعودی بودن یک تابع را با $+$ و نزولی بودن آن را با $-$ نشان دهیم، در این صورت وضعیت یکنوایی ترکیب چند تابع مانند ضرب علامت‌ها در یکدیگر است. مثلاً اگر f صعودی $(+)$ و g نزولی $(-)$ باشد، تابع $fofogofog$ نیز صعودی است، زیرا:
$(+)\times(+)\times(-)\times(+)\times(-) \to (+)$

C **۵۶- گزینه‌ی (۱)** از قاعده‌ی ترکیب توابع استفاده می‌کنیم. تابع $y = \log(\sqrt{x})$ اکیداً صعودی است، زیرا توابع $\sqrt{x}$ و $\log x$ صعودی اکیدند. در تابع $y = \log_۲(x^{-۳})$ چون $x^۳ >$ ، پس $\frac{۱}{x^۳}$ نزولی اکید است و همچنین $\log_۲ x$ صعودی اکید است، بنابراین $\log_۲ x^{-۳}$ نزولی اکید خواهد بود. قسمت (ت) نیز به‌طور مشابه نزولی اکید است. تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x\sin x}$ نه اکیداً نزولی است، نه اکیداً صعودی (مثلاً $f( ) = f(\pi) =$).

C **۵۷- گزینه‌ی (۱)** داریم: $f(x) = -\log_۲(x^۲ - ۲x - ۳)$، پس برای صعودی اکید بودن f، باید تابع $h(x) = -f(x)$ نزولی اکید باشد. می‌دانیم تابع $y = \log_۲ x$ یک تابع اکیداً صعودی است، پس طبق قاعده‌ی ترکیب توابع برای نزولی اکید بودن $h(x) = \log_۲(x^۲ - ۲x - ۳)$ باید $y = x^۲ - ۲x - ۳$ نیز نزولی اکید باشد. این سهمی برای $x \le ۱$ نزولی اکید است. ولی برای آن‌که عبارت موردنظر در دامنه‌ی تابع لگاریتم باشد، باید $x^۲ - ۲x - ۳ >$ ، پس $x > ۳$ یا $x < -۱$. اشتراک این شرط با شرط قبلی $x \le ۱$ به $x < -۱$ منجر می‌شود.

B **۵۸- گزینه‌ی (۱)** باید داشته باشیم:

$$f(|x|) - f(۲) > \ \Rightarrow f(|x|) > f(۲) \xrightarrow{\text{نزولی اکید است } f} |x| < ۲ \Rightarrow -۲ < x < ۲$$

B **۵۹- گزینه‌ی (۲)** برای آن که $g(x)$ تعریف شده باشد باید داشته باشیم:

$$f(|x+۳|) - f(|۳x+۱|) \ge \ \Rightarrow f(|x+۳|) \ge f(|۳x+۱|)$$

چون f اکیداً نزولی است از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود:

$$|x+۳| \le |۳x+۱| \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ \le ۹x^۲ + ۶x + ۱ \Rightarrow ۸x^۲ \ge ۸ \Rightarrow x^۲ \ge ۱ \Rightarrow x \ge ۱ \text{ یا } x \le -۱$$

C **۶۰- گزینه‌ی (۳)** از نامساوی فرض با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع نتیجه می‌گیریم:

$$۲a^۲ + a + ۱ > ۳a^۲ - ۴a + ۱ \Rightarrow a^۲ - ۵a < \ \Rightarrow \ < a < ۵$$

همچنین باید هر دو عبارت $۲a^۲ + a + ۱$ و $۳a^۲ - ۴a + ۱$ در دامنه‌ی تابع، یعنی $(,+\infty)$ باشند. نامساوی $۲a^۲ + a + ۱ >$ همواره برقرار است و برای عبارت دیگر داریم:

$$۳a^۲ - ۴a + ۱ > \ \Rightarrow (a-۱)(۳a-۱) > \ \Rightarrow a > ۱ \text{ یا } a < \frac{۱}{۳} \xrightarrow{<a<۵} \ < a < \frac{۱}{۳} \text{ یا } ۱ < a < ۵$$

در این فاصله برای a، ۳ مقدار صحیح $\{۲,۳,۴\}$ وجود دارد.

۶۱- گزینه‌ی (۴) A

تعریف تابع یک‌به‌یک

تابع f در صورتی یک‌به‌یک است که به ورودی‌های مختلف، خروجی‌های مختلف نسبت بدهد. به این معنی که در نمایش زوج مرتبی آن، هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه‌های دوم یکسان یافت نشود. به زبان ریاضی، برای هر $x_۱ , x_۲ \in D_f$، اگر $f(x_۱) = f(x_۲)$، آن‌گاه $x_۱ = x_۲$.

چون $f(k) = f(-۳) = ۱$ پس $k = -۳$. در نتیجه: $f = \{(۵,۲),(-۳,۱),(۵,a+۱)\}$. اکنون چون f تابع است، از $(۵,۲) \in f$ و $(۵,a+۱) \in f$ نتیجه می‌شود:

$$a+۱ = ۲ \Rightarrow a = ۱ \xrightarrow{k=-۳} a+۲k = ۱-۶ = -۵$$

۶۲- گزینه‌ی (۳) A از $f(۳) = f(a-۱) = ۲$ نتیجه می‌شود:

$$a-۱ = ۳ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow f = \{(۳,۲),(۴m,۳),(m^۲+۴,۳)\}$$

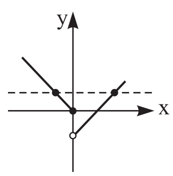
اکنون از $f(m^۲+۴) = ۳$ و $f(۴m) = ۳$ خواهیم داشت:

$$m^۲+۴ = ۴m \Rightarrow (m-۲)^۲ = \quad \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow a+m = ۶$$

۶۳- گزینه‌ی (۱) A

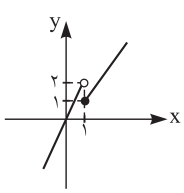
نکته: تابع f یک‌به‌یک است هرگاه هر خط افقی نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

در تابع گزینه‌ی (۱)، خطی افقی وجود دارد که نمودار تابع را در بیش‌تر از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک نیست.



۶۴- گزینه‌ی (۱) A

برای تشخیص توابع غیر یک‌به‌یک در تست‌ها، بهترین راه استفاده از مثال نقض و نمودار (برای توابع چندضابطه‌ای) است. اگر تابعی به دو مقدار مختلف، خروجی یکسانی نسبت دهد، قطعاً یک‌به‌یک نیست.



در توابع گزینه‌های (۲) و (۳) به ترتیب $f(\ ) = f(۱)$ و $f(۱) = f(-۱)$، پس یک‌به‌یک نیستند. در گزینه‌ی (۴) به نمودار تابع دقت کنید که نشان می‌دهد f یک‌به‌یک نیست.

همچنین برای اثبات این‌که تابع گزینه‌ی (۱) یک‌به‌یک است، دو راه داریم:

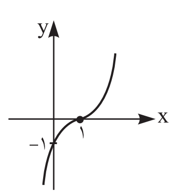
راه اول: فرض می‌کنیم $f(x_۱) = f(x_۲)$ و نشان می‌دهیم $x_۱ = x_۲$.

$$x_۱^۳ + ۱ = x_۲^۳ + ۱ \Rightarrow x_۱^۳ = x_۲^۳ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

راه دوم: می‌دانیم تابع $f(x) = x^۳ + ۱$ اکیداً صعودی است. هر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی یک‌به‌یک است، زیرا اگر $x_۱ < x_۲$، آن‌گاه $f(x_۱) < f(x_۲)$ یا $f(x_۱) > f(x_۲)$، و هیچ‌گاه دو مقدار $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ برای $x_۱$ و $x_۲$ نابرابر، مساوی نخواهند شد.

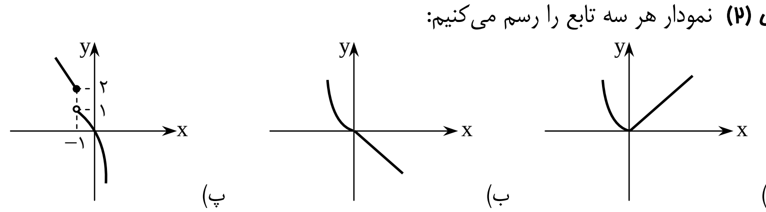
نکته: اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، قطعاً یک‌به‌یک است.

۶۵- گزینه‌ی (۳) B گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) با مثال نقض رد می‌شوند. مثلاً در گزینه‌ی (۱): $f(\ ) = f(\pi)$، در گزینه‌ی (۲): $f(\ ) = f(\frac{\pi}{۲})$ و در گزینه‌ی (۴): $f(۱) = f(-۱)$. ولی در تابع گزینه‌ی (۳) با رسم نمودار تابع می‌بینیم که تابع اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.



$$y = \begin{cases} (x-۱)^۲ & x \geq ۱ \\ -(x-۱)^۲ & x < ۱ \end{cases}$$

۶۶- گزینه‌ی (۲) A نمودار هر سه تابع را رسم می‌کنیم:



واضح است که توابع (ب) و (پ) یک‌به‌یک‌اند.

B **۶۷- گزینه‌ی (۱) راه اول:** با رد کردن گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) می‌توان درستی گزینه‌ی (۱) نتیجه گرفت، مثال نقض می‌آوریم:

$۲)\ y = \ \Rightarrow x^{۲}(x^{۲}-۲) = \ \Rightarrow x = \ ,\pm\sqrt{۲}$

$۳)\ y = \ \Rightarrow x^{۲}+x\,|x| = \ \Rightarrow x(x+|x|) = \ \Rightarrow x \le$

$۴)\ y = \ \Rightarrow x^{۲}(x-۳) = \ \Rightarrow x = \ ,۳$

راه دوم: با توجه به آن‌که توابع $y_۱ = x^{۳}$ و $y_۲ = x$ اکیداً صعودی‌اند، پس جمع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است. بنابراین تابع گزینه‌ی (۱) اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

B **۶۸- گزینه‌ی (۴)** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): واضح است که $x^{۵}-x$ به ازای مقادیر $-۱, ۱,$ برابر صفر می‌شود. پس تابع غیر یک‌به‌یک است.

برای گزینه‌ی (۲) ($f(\ ) = f(-۱) = $) و همین‌طورگزینه‌ی (۳) ($f(\ ) = f(۱) = ۲$)، مثال نقض وجود دارد، بنابراین یک‌به‌یک نیستند.

گزینه‌ی (۴): دامنه‌ی تابع $y = x+۲+\sqrt{x-۱}$، $[۱,+\infty)$ است. در این بازه: $|x+۲| = x+۲$، و داریم: . اکنون دقت کنید که تابع اکیداً صعودی و بنابراین یک‌به‌یک است. زیرا: $x_۱ < x_۲ \Rightarrow x_۱+۲ < x_۲+۲ \ ,\ \sqrt{x_۱-۱} < \sqrt{x_۲-۱} \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$

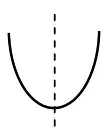
C **۶۹- گزینه‌ی (۲)** تابع گزینه‌ی (۴) به وضوح غیر یک‌به‌یک است. در تابع گزینه‌ی (۳) داریم $f(\ ) = f(۱) = $، پس تابع غیر یک‌به‌یک است. در تابع گزینه‌ی (۱) ضابطه‌ی تابع را به صورت $f(x) = x(x^{۲}+x-a^{۲})+b$ می‌توانیم بنویسیم که اگر ریشه‌ی غیرصفر معادله‌ی $x^{۲}+x-a^{۲} = $ را α بنامیم داریم: $f(\ ) = f(\alpha) = b$، پس این تابع نیز غیر یک‌به‌یک است. حال برای اثبات یک‌به‌یک بودن تابع گزینه‌ی (۲) داریم:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{x_۱}{\sqrt{x_۱^{۲}+۱}} = \frac{x_۲}{\sqrt{x_۲^{۲}+۱}}$$

چون مخرج‌های دو کسر مثبت‌اند صورت‌ها باید هم‌علامت باشند. با مجذور کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$\frac{x_۱^{۲}}{x_۱^{۲}+۱} = \frac{x_۲^{۲}}{x_۲^{۲}+۱} \Rightarrow x_۱^{۲}x_۲^{۲}+x_۱^{۲} = x_۱^{۲}x_۲^{۲}+x_۲^{۲} \Rightarrow x_۱^{۲} = x_۲^{۲} \Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \xrightarrow{\text{هم‌علامت } x_۲, x_۱} x_۱ = x_۲$$

B **۷۰- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع یک سهمی است که اگر هر کدام از نیمه‌های آن را در نظر بگیریم به تنهایی یک‌به‌یک است.

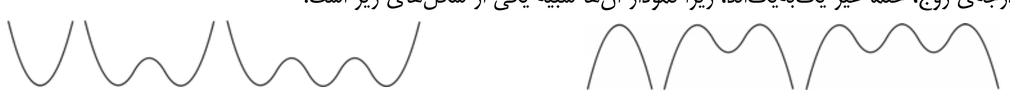


پس اگر $[a,+\infty)$ زیرمجموعه‌ای از $[۲,+\infty)$ باشد، تابع یک‌به‌یک است، بنابراین $a \ge ۲$.

حال اگر $a \ge ۲$ باشد حکم واضح است. بنابراین کم‌ترین مقدار $۲a$ است.

C **۷۱- گزینه‌ی (۳)**

نکته: چندجمله‌ای‌های درجه‌ی زوج، حتماً غیر یک‌به‌یک‌اند، زیرا نمودار آن‌ها شبیه یکی از شکل‌های زیر است.



برای آن‌که f یک‌به‌یک باشد، باید درجه‌ی آن فرد باشد، پس $a+۲ = $، بنابراین $a = -۲$ و $f(x) = x^{۳}+bx$. حال یک‌به‌یک بودن f را با $f(x_۱) = f(x_۲)$ بررسی می‌کنیم:

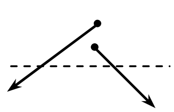
$$x_۱^{۳}+bx_۱ = x_۲^{۳}+bx_۲ \Rightarrow x_۱^{۳}-x_۲^{۳}+b(x_۱-x_۲) = \ \Rightarrow (x_۱-x_۲)(x_۱^{۲}+x_۱x_۲+x_۲^{۲}+b) =$$

برای آن‌که تابع یک‌به‌یک باشد، باید عبارت درجه‌ی دوی داخل پرانتز (بر حسب $x_۱$) ریشه‌ی دیگری غیر از $x_۲$ نداشته باشد، یعنی باید $\Delta \le$:

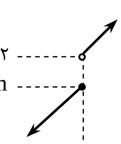
$$\Delta \le \ \Rightarrow x_۲^{۲}-۴(x_۲^{۲}+b) \le \ \Rightarrow ۳x_۲^{۲}+۴b \ge$$

برای آن‌که عبارت بالا همواره نامنفی باشد، باید $۴b \ge$ ، پس $b \ge$ ، بنابراین $a+b \ge -۲$، پس گزینه‌ی (۳) درست است.

C **۷۲- گزینه‌ی (۳)** برای $m \ne$ ، هر یک از ضوابط تابع f، یک‌به‌یک هستند. حال اگر m عددی منفی باشد، نمودار ضابطه‌ی دوم خطی با شیبی منفی می‌شود که در آن صورت، یک‌به‌یک بودن تابع نقض می‌شود، زیرا فرم کلی نمودار تابع چنین خواهد بود:



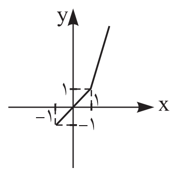
پس $m >$ ، در نتیجه نمودار تابع شبیه شکل روبه‌رو می‌شود که برای یک‌به‌یک بودن تابع باید عرض نقطه‌ی توخالی بیش‌تر از یا مساوی با عرض نقطه‌ی توپر باشد، بنابراین:

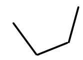


$$۳m+۲ \ge ۳+m \Rightarrow ۲m \ge ۱ \Rightarrow m \ge \frac{۱}{۲} \xrightarrow{m>} m \ge \frac{۱}{۲}$$

D **۷۳- گزینه‌ی (۴)** ضابطه‌ی تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(۱-۲a)x-۲a & x\le -۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۳x-۲ & x\ge ۱\end{cases}$$



این تابع باید یک‌به‌یک باشد. نمودار دو بخش معلوم تابع را رسم می‌کنیم:
مقدار تابع در $x=-۱$ برابر با ۱- است، پس بخش سوم نمودار تابع خطی با شروع از نقطه‌ی $(-۱,-۱)$ است که اگر شیب آن منفی باشد، به وضوح با یک تابع غیر یک‌به‌یک مواجه‌ایم، (با نموداری شبیه )، بنابراین باید شیب این خط مثبت باشد: $۱-۲a> \ \Rightarrow a<\frac{۱}{۲}$

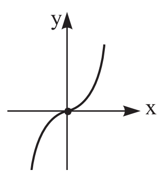
D **۷۴- گزینه‌ی (۳)** با جای‌گذاری $-x$ به جای x در معادله به‌دست می‌آوریم: $(fog)(-x)=-x^۲$، پس $f(g(x))=f(g(-x))$. حال به این دقت کنید که تابع f اکیداً یکنوا و در نتیجه یک‌به‌یک است، پس از تساوی آخر نتیجه می‌گیریم $g(x)=g(-x)$، پس g زوج است.

A **۷۵- گزینه‌ی (۴)**

> **تعریف:** تابع $f:A\to B$ را پوشا می‌نامیم، هرگاه: $R_f=B$
> به بیان دیگر برای هر $y\in B$، حداقل یک $x\in A$ موجود باشد به‌طوری که $f(x)=y$.
> **تذکّر:** وقتی مجموعه‌ی B مشخص نباشد، منظور از پوشا بودن تابع این است که برد آن برابر R باشد.

دقت کنید که $f(۱)=f(-۱)=۱$ و از طرفی $R_f=[\ ,+\infty)$. پس تابع نه یک‌به‌یک و نه پوشا است.

A **۷۶- گزینه‌ی (۱)** به نمودار f نگاه کنید، با توجه به نمودار، f یک‌به‌یک است و از طرفی برد آن برابر R است، پس پوشا نیز می‌باشد.



$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge \\ -x^۲ & x<\end{cases}$$

> **نکته:** برای آن‌که تابع حقیقی f، بردی برابر R داشته باشد، باید هر خط افقی نمودار آن را حداقل در یک نقطه قطع کند.

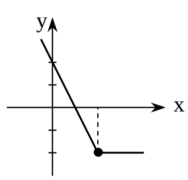
A **۷۷- گزینه‌ی (۲)** واضح است که تابع غیر یک‌به‌یک است (مثلاً $f(-۱)=f(۱)$). از طرفی چون همواره $f(x)\ge ۱$ (چرا؟)، پس $R_f\ne Z$، بنابراین پوشا نیز نیست.

B **۷۸- گزینه‌ی (۱)** ابتدا توجه کنید که چون $x>$ داریم $f(x)=\frac{x}{۱+x}$ و می‌دانیم هر تابع هموگرافیک یک‌به‌یک است. از طرفی با محاسبه‌ی برد f مشخص می‌شود که $R_f=(\ ,۱)$، پس f پوشا نیز هست.

$$y=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y}\xrightarrow{x>}\frac{y}{y-۱}>\ \ \Rightarrow\ <y<۱$$

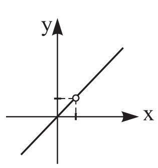
B **۷۹- گزینه‌ی (۴)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار مشخص است که تابع نه یک‌به‌یک است، نه پوشا.

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x\ge ۲\\ -۲x+۲ & x<۲\end{cases}$$



A **۸۰- گزینه‌ی (۳)** روشن است که $f\times g$ تابعی درجه دو است و توابع درجه‌ی دو با دامنه‌ی R، با توجه به نمودار سهمی شکل آن‌ها، نه یک‌به‌یک هستند نه پوشا.

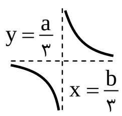
B **۸۱- گزینه‌ی (۲)** توجه کنید که $D_{fof}=\{x\ne ۱\mid \frac{x}{x-۱}\ne ۱\}=R-\{۱\}$ و ضابطه‌ی fof عبارت است از:

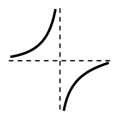


$$(fof)(x)=\frac{\frac{x}{x-۱}}{\frac{x}{x-۱}-۱}=\frac{x}{x-(x-۱)}=x$$

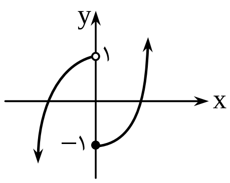
نمودار fof را رسم کرده‌ایم. واضح است که f یک‌به‌یک است، اما در R پوشا نیست.

B **۸۲- گزینه‌ی (۲)** با یک تابع هموگرافیک مواجه‌ایم که نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است. پس به وضوح تابع در دامنه‌ی خود یک‌به‌یک است. با توجه به تعریف $D_f = R-\{۲\}$ و با توجه به ضابطه‌ی $D_f = R-\{\frac{b}{۳}\}$، پس $\frac{b}{۳}=۲$، در نتیجه $b=۶$. همچنین با توجه به نمودار $R_f = R-\{\frac{a}{۳}\}$، پس برای پوشا بودن تابع باید $\frac{a}{۳}=۳$، بنابراین $a=۹$.





A **۸۳- گزینه‌ی (۳)** نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، تابع یک‌به‌یک نیست، ولی هر خط افقی نمودار آن را قطع می‌کند، پس پوشا هست.



B **۸۴- گزینه‌ی (۴)** یک‌به‌یک نبودن توابع گزینه‌های (۱) تا (۳) را به راحتی می‌توانیم با رسم نمودار نشان بدهیم. در تابع گزینه‌ی (۴) دامنه $x \geq$ است. در این دامنه هر دو تابع $y_۱ = |x|$ و $y_۲ = \sqrt{x}$ اکیداً صعودی‌اند، پس تابع اصلی نیز که مجموع آن‌ها است، اکیداً صعودی می‌باشد. بنابراین یک‌به‌یک نیز هست.

B **۸۵- گزینه‌ی (۱)** تابع مورد (۱) زوج است، زیرا برای $x >$ داریم: $f(-x) = x^۴ - x + ۱ \Rightarrow f(-x) = f(x)$
موارد دیگر نه زوج‌اند و نه فرد، در هر کدام با مقایسه‌ی مقادیر $f(۱)$ و $f(-۱)$ می‌بینید که نه $f(۱) = f(-۱)$ و نه $f(۱) = -f(-۱)$!

C **۸۶- گزینه‌ی (۳)** برای $x \geq ۴$ داریم $-x \leq -۴$، پس از شرط $f(-x) = f(x)$ نتیجه می‌گیریم:

$$c(-x)^۲ + d(-x) + e = x^۲ + ۲x + ۳ \Rightarrow cx^۲ - dx + e = x^۲ + ۲x + ۳ \Rightarrow c = ۱\ ,\ d = -۲\ ,\ e = ۳$$

اگر $-۴ < x < ۴$، آن‌گاه $-۴ < -x < ۴$، پس از شرط $f(-x) = f(x)$ نتیجه می‌گیریم:

$$۲|x+۳| + a|x+b| = ۲|-x+۳| + a|-x+b| \xrightarrow{|\alpha|=|-\alpha|} ۲|x+۳| + a|x+b| = ۲|x-۳| + a|x-b|$$

پس $a = ۲$ و $b = -۳$ که همراه با نتایج قبلی به‌دست می‌آوریم: $a+b+c+d+e = ۱$

B **۸۷- گزینه‌ی (۲)** برای $x >$ داریم $-x <$ و باید $f(-x) = -f(x)$، بنابراین:

$$\sqrt[۳]{ax^۲ - bx} - cx + d = -(\sqrt[۳]{x^۲ + ۲x} + ۴x + ۱) \Rightarrow \sqrt[۳]{ax^۲ - bx} - cx + d = \sqrt[۳]{-x^۲ - ۲x} - ۴x - ۱$$

برای آن‌که دو طرف به ازای هر $x >$ برابر باشند، باید $a = -۱$، $b = ۲$، $c = ۴$ و $d = -۱$، پس $a+b+c-d = ۶$.