فصل ۱

چندجمله‌ای و معادله‌ی درجه‌ی دوم

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱- عدد ۲۴ را به صورت مجموع دو عدد نوشته‌ایم، طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۴۳ شده است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- مجموع عددی کم‌تر از ۱ با وارون خودش برابر $\frac{۱۳}{۶}$ است. سه برابر آن عدد کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۸ ۳) ۲ ۴) ۲/۸

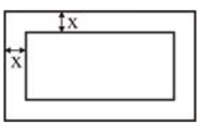
۳- نسبت دو عدد مثبت برابر $\frac{۳}{۵}$ و مجموع مربع‌های آن دو ۱۶۶۶ شده است. مجموع دو عدد کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۴ ۳) ۵۶ ۴) ۶۵

٤- مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۷

۵- اطراف یک استخر، پیاده‌رویی به عرض x متر ساخته شده است. طول استخر ۴۰ متر و عرض آن ۳۰ متر است. کل سطح با احتساب پیاده‌رو، ۲۰۰۰ متر مربع است. در این صورت مقدار x چند متر است؟



۱) ۵ ۲) ۱۵
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

٦- معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌هایش $۳ - \sqrt{۵}$ باشد کدام است؟

۱) $x^{۲} - ۶x - ۴ =$ ۲) $x^{۲} - ۶x + ۴ =$ ۳) $x^{۲} - ۶x + ۵ =$ ۴) $x^{۲} - ۳x + ۱ =$

۷- به ازای کدام مقدار m، معادله‌ی $(m+۲)x^{۲} + ۴x + m - ۱$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $-۳ < m < ۲$ ۲) $-۲ < m < ۳$ ۳) $-۱ < m < ۲$ ۴) $۱ < m < ۲$

۸- به ازای کدام مقدار m، چندجمله‌ای $P(x) = mx^{۲} - ۲x + m - ۲$ فقط یک ریشه دارد؟ $(m \neq \ )$

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱ \pm \sqrt{۲}$ ۴) $۲ \pm \sqrt{۲}$

۹- به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی $(x+۲)(x^{۲} - ۲x + ۴ + m) =$ سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

۱) $m < -۴$ ۲) $m < -۳$ ۳) $m > -۴$ ۴) $m < -۳$ و $m \neq -۱۲$

۱۰- اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^{۲} + ۳x + b$ فقط یک ریشه برابر $x = ۲$ داشته باشد، آن‌گاه حاصل $۴a - b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶- ۴) صفر

۱۱- مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{-۱, \frac{۱}{۲}\}$ است؟

۱) $۲x^{۲} + x + ۱ =$ ۲) $۴x^{۲} + x - ۲ =$ ۳) $۲x^{۲} - x + ۱ =$ ۴) $۴x^{۲} + ۲x - ۲ =$

۱۲- حاصل‌جمع مقادیری از a که به ازای آن‌ها معادله‌ی $(a-۱)x^{۲} + (a-۴)x + a + ۷ =$ دقیقاً یک ریشه دارد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) $-\frac{۳۲}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۳- اگر $a >$ و دو معادله‌ی $x^{۲} + ۲x + a =$ و $x^{۲} - x - ۲a =$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، آن‌گاه این ریشه‌ی مشترک کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

* ۱۴- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c =$ با «Δ»ی معادله برابر باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

نمودار چندجمله‌ای درجه‌ی دوم

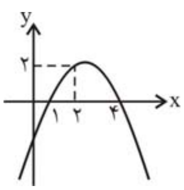
۱۵- نمودار سهمی $y = x^۲ - x$ از کدام ناحیه‌ی صفحه‌ی مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۶- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m-۱)x^۲ + \sqrt{۳}x + m$ همواره زیر محور xها است؟

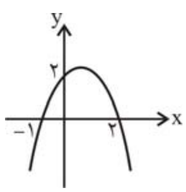
۱) $m < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} < m < ۱$ ۳) $۱ < m < \frac{۳}{۲}$ ۴) $m > \frac{۳}{۲}$

۱۷- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx - ۴$ رسم شده است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



۱) $(۱, -۵)$
۲) $(-۱, -۵)$
۳) $(-۱, ۵)$
۴) $(۱, ۵)$

۱۸- در شکل روبه‌رو نمودار چندجمله‌ای $P(x) = ax^۲ + bx + c$ رسم شده است. حاصل $۴c + ۲b + a$ کدام است؟

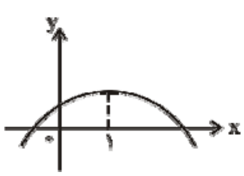


۱) ۹ ۲) $\frac{۹}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹- اگر خط $x = -\frac{۱}{۲}$ محور تقارن سهمی $y = x^۲ + ax + ۱$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

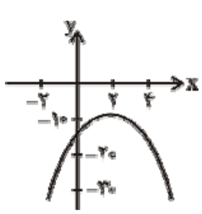
۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰- در شکل روبه‌رو بخشی از نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ رسم شده است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر با صفر است؟



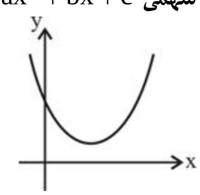
۱) ac ۲) $۲a + b$
۳) $۲a - b$ ۴) $a - b + c$

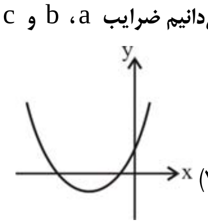
۲۱- نمودار سهمی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. کدام گزینه درست است؟

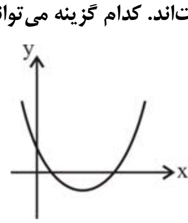


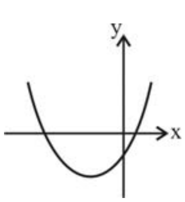
۱) $a >$ و $b >$ و $c >$
۲) $a <$ و $b >$ و $c >$
۳) $a <$ و $b >$ و $c <$
۴) $a <$ و $b <$ و $c <$

۲۲- در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ می‌دانیم ضرایب a، b و c هر سه مثبت‌اند. کدام گزینه می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟

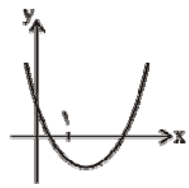
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

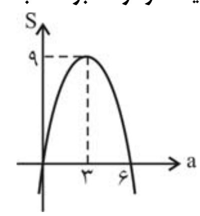
۲۳- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است. چه تعداد از عبارت‌های زیر قطعاً مثبت هستند؟

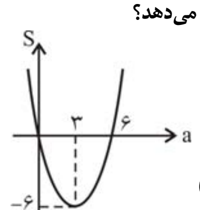


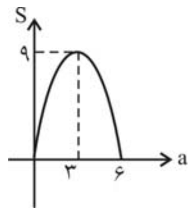
الف) ab ب) ac پ) b ت) $a+b+c$ ث) $a-b+c$

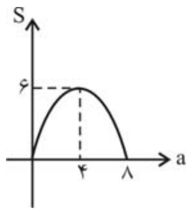
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۴- یک ورق کاغذ مستطیل شکل به محیط ۱۲ سانتی‌متر مفروض است. اگر یک ضلع مستطیل را با a و مساحت آن را با S نشان دهیم، کدام گزینه نمودار S بر حسب a را نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۵- اگر بدانیم چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ ریشه‌ی حقیقی ندارد و $a>$ ، آن‌گاه مقدار عبارت $a+4b+16c$ برابر چند تا از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۱- پ) ۲ ت) صفر

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۶- اگر عرض رأس سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-2ax+4a+1$ برابر ۴ باشد و بدانیم این سهمی ماکزیمم دارد، این سهمی محور y ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۳- ۳) ۱۱- ۴) ۱۳

۲۷- نقطه‌ی $T(1,8)$ رأس یک سهمی است. اگر بدانیم سهمی از نقطه‌ی $(,17)$ می‌گذرد، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند معادله‌ی این سهمی باشد؟

۱) $y=9x^2-18x+9$ ۲) $y=9x^2-18x+17$ ۳) $y=x^2-18x+17$ ۴) $y=9x^2-10x+17$

۲۸- معادله‌ی $x^2-2ax+b+3=$ ریشه‌ی مضاعف دارد. کدام معادله قطعاً دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

۱) $x^2-2ax+b+5=$ ۲) $x^2-2ax+b+1=$ ۳) $x^2+2ax+b+3=$ ۴) $x^2+ax+b+3=$

۲۹- نمودار سهمی $y=mx^2+2mx+m-1$ از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد. مقادیر m کدام است؟

۱) $m>$ ۲) $<m<1$ ۳) $m>1$ ۴) $m\in R-\{\ \}$

۳۰- به ازای چند مقدار صحیح a، نمودار سهمی $y=-x^2+ax+a^2-4$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۳۱- اگر معادله‌ی $ax^2-3ax+1=$ دو ریشه‌ی x_1 و x_2 با شرط $x_1<x_2$ داشته باشد و بدانیم $1\in(x_1,x_2)$، آن‌گاه مقادیر a کدام است؟

۱) $a>\frac{1}{2}$ ۲) $a<$ ۳) $<a<\frac{1}{2}$ ۴) $a>\frac{1}{2}$ یا $a<$

* ۳۲- برای کدام مقادیر m، معادله‌ی $(2m+3)x^2-6x+(2m+3)=$ دو ریشه در فاصله‌ی $(,3)$ دارد؟

۱) $-\frac{3}{5}<m<$ ۲) $-3<m<$ ۳) $-\frac{3}{2}<m<$ ۴) $-\frac{3}{2}<m<-\frac{3}{5}$

* ۳۳- نقاط A و B روی سهمی $y=2x^2+4x-2$ قرار دارند. اگر بدانیم مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB است، آن‌گاه طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $2\sqrt{17}$ ۴) $4\sqrt{17}$

* ۳۴- فرض کنید $f(x)=x^2-2ax+1$ و $g(x)=2b(a-x)$. مجموعه‌ی نقاط دارای مختصات (a,b) را که به ازای آن‌ها نمودارهای f و g با هم نقطه‌ی مشترکی ندارند، S می‌نامیم. مساحت S کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

روابط بین ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم

۳۵- به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2+x+k=$ در رابطه‌ی $kx_1x_2+x_1+x_2=3$ صدق می‌کنند؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) ± 3 ۴) $\pm\sqrt{2}$

۳۶- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+3x-1=$، اگر x_1 و x_2 دو ریشه باشند، آن‌گاه حاصل $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) -۲۷ ۴) ۲۷

۳۷- اگر $2k^2+4k-a=$ و $2k'^2+4k'-a=$، آن‌گاه حاصل $k+k'$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) $-\frac{a}{2}$

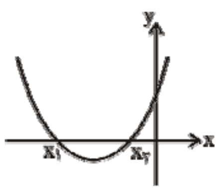
۳۸- حاصل‌جمع جواب‌های معادله‌ی $(4x-3)^2=(8x-6)(7x-2)$ کدام است؟

۱) ۰/۸۵ ۲) -۰/۸۵ ۳) $\frac{3}{40}$ ۴) $-\frac{3}{40}$

۳۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-7x-1=$ باشند، آن‌گاه عبارت $2x_1(1-x_2)+2x_2$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۴۰- نمودار سهمی $y=x^2+6x+m$ در شکل روبه‌رو رسم شده است، اگر بدانیم $x_1=2x_2$، آن‌گاه مقدار m کدام است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) ۱۲
۴) ۲

۴۱- در معادله‌ی $3x^2-15x+m=$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش‌تر باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۴۲- به ازای چه مقدار m بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5mx+16=$ روابط $x_1^3=x_2$ و $x_2>$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۸

۴۳- به ازای کدام مقدار m، معادله‌ی $x^2+(m^3-m)x+3m+1=$ دو ریشه‌ی حقیقی قرینه دارد؟

۱) -1 ۲) $,1$ ۳) $\pm 1,$ ۴) صفر

۴۴- اگر معادله‌ی $mx^2-2(m^2+m-2)x+m-2=$ دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف داشته باشد، آن‌گاه مقادیر m کدام است؟

۱) $m<$ ۲) $m>2$ ۳) $<m<2$ ۴) $m<$ یا $m>2$

۴۵- معادله‌ی $mx^2+2x+2m-1=$ دو ریشه‌ی مثبت متمایز دارد. حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $-1<m<\frac{1}{2}$ ۲) $m<$ ۳) $-\frac{1}{2}<m<$ ۴) $m<$ یا $m>\frac{1}{2}$

۴۶- به ازای کدام مقادیر m در معادله‌ی درجه‌ی دوم $m^2x^2-4x-1=$، فقط ریشه‌ای که قدرمطلق آن بیش‌تر است، مثبت است؟

۱) $|m|<2\ ,\ m\neq$ ۲) $|m|>2$ ۳) هر مقدار $m\neq$ ۴) هیچ مقدار m

۴۷- در معادله‌ی $x^2-3\sqrt{3}x+6=$، اگر x_1 و x_2 دو ریشه‌ی معادله باشند، آن‌گاه حاصل $x_1^4+x_2^4$ کدام است؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۵ ۳) ۷۲۹ ۴) ۱۵۳

۴۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{3}x^2-x-1=$ باشند، آن‌گاه حاصل $x_1^3x_2+x_2^3x_1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}-6}{9}$ ۲) $-\frac{6+\sqrt{3}}{9}$ ۳) $-\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+9}{3}$

۴۹- در معادله‌ی $x^2-6x+1=$ دو ریشه را x' و x'' می‌نامیم. اگر $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=2m$، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۵۰- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}+x-3=$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^{3}(1+\alpha^{3})+\beta^{3}(1+\beta^{3})$ کدام است؟

۱) ۸۳ ۲) ۶۳ ۳) ۱۶۴ ۴) ۱۴۴

۵۱- اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-4x+1=$ باشند، آن‌گاه حاصل $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=$ باشند، آن‌گاه حاصل $A=|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt[4]{3}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[4]{3}$

۵۳- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-(\frac{1}{a^{4}}+a^{2})x+\frac{1}{a^{2}}=$ باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ کدام است؟

۱) $a^{8}+\frac{1}{a^{8}}$ ۲) $a^{4}+\frac{1}{a^{2}}$ ۳) $a^{4}+\frac{1}{a^{4}}$ ۴) $a^{6}+\frac{1}{a^{6}}$

* ۵٤- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله‌ی $x^{2}-(m+3)x+m^{2}=$ باشند و بدانیم $x_1(m^{2}-3x_1)+x_2(m^{2}-3x_2)=$ ، آن‌گاه m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۵- در معادله‌ی $7x^{2}-6x+1=$ اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ ۲) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$

۳) $x_1(1+x_2)=1-x_2$ ۴) $x_1+x_2>\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$

٥٦- در معادله‌ی $x^{2}+x-1=$ ، اگر ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $2x_1^{2}+2x_1+(x_1+x_2)^{2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴- ۴) ۱-

۵۷- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{2}-3x+1=$ ، اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، آن‌گاه حاصل $\sqrt{x_1^{2}(3x_2-1)}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{2}+x-1=$ باشند و $x_2>x_1$ ، آن‌گاه مقدار عبارت $A=5x_1^{2}+3x_2^{2}$ کدام است؟

۱) $12+\sqrt{5}$ ۲) $12-\sqrt{5}$ ۳) $24+\sqrt{5}$ ۴) $24-\sqrt{5}$

۵۹- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}+x-3=$ باشند، آن‌گاه حاصل $\alpha^{3}-4\beta^{2}+20$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۹- ۳) ۱- ۴) ۱

٦۰- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $(x+2)^{2}+x+1=$ باشند، آن‌گاه حاصل $(a+2)^{3}+(b+2)^{3}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵۰ ۳) ۴- ۴) ۵۰-

٦۱- اگر بین ریشه‌های معادله‌ی $x^{2}-(2m-3)x+m-1=$ رابطه‌ی $3x_1+5x_1x_2+2x_2=$ برقرار باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) $2\pm\sqrt{7}$ ۲) ۱ , ۳ ۳) ۵ , ۴ ۴) ۲

* ٦۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $(x-2)(x-3)+(x-3)(x+1)+(x+1)(x-2)=$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$

۱) صفر ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

* ٦۳- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $ax^{2}+bx+c=$ باشند و بدانیم $\frac{2x_1^{3}}{1+x_1^{2}}=x_2^{2}$ و $\frac{2x_2^{3}}{1+x_2^{2}}=x_1^{2}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{4a+b+4c}{a}$ کدام است؟ $(c\neq\ )$

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) $\frac{1}{4}$

ساختن معادله‌ی درجه‌ی ۲ از روی ریشه‌ها

۶۴- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2 + 10x - 16 = 0$ ۲) $x^2 - 10x + 16 = 0$

۳) $x^2 - 10x - 16 = 0$ ۴) $x^2 + 10x + 16 = 0$

۶۵- به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3x - k = 0$ دو واحد از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x + 1 = 0$ کم‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 16x + 30 = 0$ باشند، آن‌گاه کدام گزینه معادله‌ای را بیان می‌کند که ریشه‌های آن $2x_1 + 5$ و $2x_2 + 5$ باشند؟

۱) $x^2 + x = 0$ ۲) $x^2 - 26x + 165 = 0$

۳) $8x^2 + 8x - 2 = 0$ ۴) $x^2 - 6x + 5 = 0$

۶۷- اگر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$، α و β باشد، آن‌گاه ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر $-\frac{1}{\beta}$ و $-\frac{1}{\alpha}$ خواهد بود؟

۱) $cx^2 - bx + a = 0$ ۲) $ax^2 - bx + c = 0$

۳) $ax^2 - cx + b = 0$ ۴) $c^2x^2 - bx + a^2 = 0$

۶۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + px + q = 0$ باشند، آن‌گاه معادله‌ای که ریشه‌هایش $\alpha^2 + \alpha\beta$ و $\beta^2 + \alpha\beta$ باشند کدام است؟

۱) $x^2 + p^2x + p^2q = 0$ ۲) $x^2 - p^2x - p^2q = 0$

۳) $x^2 + p^2x - p^2q = 0$ ۴) $x^2 - p^2x + p^2q = 0$

معادلات درجه‌ی بالاتر

۶۹- معادله‌ی $x^4 - 6x^2 + 9 = (x+1)^2$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۰- اگر $f(x) = x^2 + x + a$، آن‌گاه مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟ $A = \{x \in Z \mid f(x^2) = f(x)\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۱- معادله‌ی $16x^3 - 13x + 3 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

* ۷۲- معادله‌ی $x^4 - 7x^2 = 4x - 5$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳

۷۳- برای کدام مقادیر b، معادله‌ی $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$ فقط ۲ ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $-4 < b < 4$ ۲) $b \geq 4$ ۳) $b \leq -4$ ۴) $-4 \leq b \leq 4$

۷۴- معادله‌ی $(x+2)(x^2+1)(x-2) = 1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۷۵- معادله‌ی $(x^2 + 3x)^2 + 8 = 6x^2 + 18x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۶- اگر معادله‌ی $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m < -4$ ۲) $m > 4$ ۳) $-4 < m < 4$ ۴) $4 < m < 9$

۷۷- معادله‌ی $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5) = 144$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- اگر a، b، c و d اعدادی صحیح باشند و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$ باشد، آن‌گاه مقدار b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۰- ۳) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ۴) ۶-

۷۹- چند نقطه از منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^4+4}{5x}$ بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $(a^2-1)(\frac{x}{x-1})^2-(2a+7)(\frac{x}{x-1})+1=$ باشند و بدانیم $\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{3}{11}$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) فقط ۱۰ ۲) فقط $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱۰ یا $-\frac{8}{3}$

معادلات معکوسه

۸۱- اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^3+ax^2+bx+c=$، وارون ریشه‌های معادله‌ی $x^3+5x^2-20x+12=$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲۰- ۲) $-\frac{10}{3}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{5}{6}$

* ۸۲- معادله‌ی $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=$ با چه تغییر متغیری به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب t تبدیل می‌شود؟ $(a\neq\ )$

۱) $t=\frac{1}{x}$ ۲) $t=x+a$ ۳) $t=\frac{1}{x+a}$ ۴) $t=x+\frac{1}{x}$

* ۸۳- اگر $P(x)=x^4+a\ x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ و $Q(x)=a_3x^4+a_2x^3+a_1x^2+a\ x$ و بدانیم برای هر $x\in R$ داریم: $P(x)>$ ، آن‌گاه کدام گزینه درباره‌ی $Q(a_3)$ درست است؟

۱) $Q(a_3)>-1$ ۲) $Q(a_3)<-3$ ۳) $-2<Q(a_3)<-1$ ۴) $Q(a_3)<-2$

ماکزیمم و می‌نیمم چندجمله‌ای درجه‌ی دوم

۸٤- کدام گزینه درباره‌ی بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+6x-4$ درست است؟

۱) بیش‌ترین مقدار آن ۵ است. ۲) کم‌ترین مقدار آن ۵ است.
۳) بیش‌ترین مقدار آن ۴- است. ۴) کم‌ترین مقدار آن ۳۱- است.

۸۵- x و y دو متغیرند و a عدد ثابتی است به‌طوری‌که $2x+y=a$. بیش‌ترین مقدار xy کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}a^2$ ۲) $\frac{1}{16}a^2$ ۳) $2a^2$ ۴) $4a^2$

۸٦- عدد ۳۶ را به‌صورت مجموع دو عدد نشان داده‌ایم که حاصل‌ضرب آن دو بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد. اختلاف این دو عدد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۷- از بین تمام مثلث‌های قائم الزاویه که مجموع دو ضلع قائم آن‌ها ۸ است، بیش‌ترین مقدار مساحت ممکن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۸۸- اگر مجموع قطر قاعده و ارتفاع یک استوانه‌ی قائم ۳۰ باشد، ارتفاع استوانه کدام مقدار باشد تا مساحت جانبی آن بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲/۵

۸۹- بیش‌ترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)

۱) ۲۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۹۶ ۴) ۳۱۶

۹۰- بین تمام مستطیل‌هایی که در دایره‌ای به شعاع ۲ محاط می‌شوند، بیش‌ترین مساحت ممکن چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۱- از بین مستطیل‌هایی با محیط ۲۴ واحد، طول کوتاه‌ترین قطر کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۹۲- اگر $۴x + y = ۵$ و $x , y >$ ، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار $A = x^{۲}y^{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $(\frac{۵}{۴})^{۲}$ ۴) $(\frac{۵}{۴})^{۴}$

۹۳- اگر $xy = ۸$ و $x , y >$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x + y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۹۴- کم‌ترین مقدار عبارت $A(x) = \frac{x^{۲} + ۱۶}{۳x}$ کدام است؟ $(x > \ )$

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

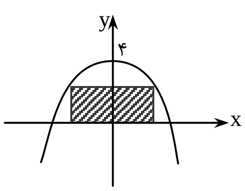
۹۵- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{۴x^{۲} + ۸x + ۱۳}{۶x + ۶}$ برای $x > -۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹۶- بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{۲}{\sqrt{۲x^{۲} - ۴x + ۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۹۷- یک ضلع مستطیلی روی محور x ها و دو رأس دیگر آن روی سهمی $y = -x^{۲} + ۴$ است. از بین چنین مستطیل‌هایی، بیش‌ترین محیط ممکن چقدر است؟

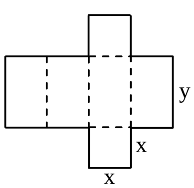


۱) ۸ ۲) ۱۰
۳) ۱۲ ۴) $۶\sqrt{۲}$

۹۸- کوتاه‌ترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقاط روی منحنی $y^{۲} = -۲x + ۴$ کدام است؟

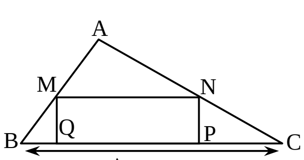
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۹۹- تمام ورق‌های فلزی شبیه شکل روبه‌رو را در نظر می‌گیریم که محیطی برابر ۴۴۰ سانتی‌متر دارند. اگر با هر کدام از این ورق‌ها یک مکعب مستطیل بسازیم، بیش‌ترین مساحت برای مکعب مستطیل‌ها چند سانتی‌متر مربع است؟



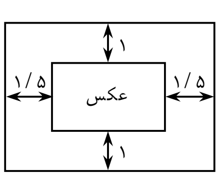
۱) ۸۸۰ ۲) ۸۸۰۰
۳) ۴۴۰ ۴) ۴۴۰۰

* **۱۰۰- در مثلث ABC با مساحت ۳۰ و ضلع $BC = ۱۰$ ، مستطیل $MNPQ$ را مطابق شکل محاط می‌کنیم. از بین چنین مستطیل‌هایی بیش‌ترین مساحت ممکن چقدر است؟**



۱) ۲۰ ۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) ۱۵ ۴) ۲۴

* **۱۰۱- یک عکس به مساحت ۴۸ سانتی‌متر مربع، مطابق شکل با حاشیه‌هایی درون یک قاب قرار گرفته است. اگر ابعاد عکس متغیر و مساحت آن ثابت باشد، کم‌ترین مساحت ممکن برای قاب چند سانتی‌متر مربع است؟**



۱) $۵۴ + ۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۵۴ + ۶\sqrt{۲}$
۳) $۵۴ + ۲۴\sqrt{۲}$ ۴) $۵۴ + ۲\sqrt{۲}$

* ۱۰۲- کم‌ترین مقدار عبارت $A = x^۲ + ۲xy + ۳y^۲ + ۲x + ۶y + ۴$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۴

۱۰۳- در رابطه‌ی $۲۴ = (۱۵ + y^۲ - ۶y)(۴x^۲ + ۴x + ۵)$ چند دوتایی مرتب (x , y) از اعداد حقیقی صدق می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰٤- اگر بیش‌ترین مقدار عبارت $x^۲ - ۴x + ۳$ برابر a و کم‌ترین مقدار آن برابر b باشد (برای $۱ \le x \le ۴$)، آن‌گاه حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

گزیده‌ی سؤالات آزمون‌های سراسری و آزاد سال ۸۶ به بعد

۱۰۵- اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ax + b =$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $۴x^۲ - ۷x + ۳ =$ باشند، آن‌گاه مقدار a کدام است؟ (سراسری-۸٦)

۱) -۱۴ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

۱۰٦- در معادله‌ی $۳x^۲ - ۱۷x + m =$ ، یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. مقدار m کدام است؟ (سراسری- ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۷- اگر منحنی به معادله‌ی $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$ ، محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری- ۸۷)

۱) $m > ۳$ ۲) $۳ < m < ۴$ ۳) $۳ < m < ۵$ ۴) $۴ < m < ۵$

۱۰۸- منحنی به معادله‌ی $y = (۲x + ۱)(x + ۸)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m چگونه است؟ (سراسری- ۸۸)

۱) $۵ < m < ۱۳$ ۲) $۱۵ < m < ۲۳$ ۳) $۷ < m < ۱۵$ ۴) $۹ < m < ۲۵$

۱۰۹- به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $y = ax^۲ - (a + ۲)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری- ۸۹)

۱) $a \le ۲$ ۲) $a >$ ۳) $a > -۲$ ۴) $-۲ \le a <$

۱۱۰- معادله‌ی $x^۴ - ۳x^۲ + ۱ =$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چقدر است؟ (آزاد- ۸٦)

۱) دو ریشه- سه ۲) دو ریشه- شش ۳) چهار ریشه- سه ۴) چهار ریشه- شش

۱۱۱- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - ۲x - ۴ =$ ، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^۲ - ۴)^۲ + ۴\beta^۲$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۸)

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۱۲- در معادله‌ی $x^۲ - ۴x + ۱ =$ ، حاصل $\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۹)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$

فصل ۱

چندجمله‌ای و معادله‌ی درجه‌ی دوم

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۲)**

معادله‌ی درجه‌ی دوم

هر معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ را یک معادله‌ی درجه‌ی دوم و چندجمله‌ای $P(x)=ax^۲+bx+c$ را یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم می‌نامند ($a\neq ۰$). عدد $\Delta=b^۲-۴ac$ را «مبین معادله» می‌گوییم. حالت‌های زیر ممکن است پیش بیاید:

۱- اگر $\Delta>۰$، آن‌گاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲- اگر $\Delta=۰$، آن‌گاه معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد: $x=\frac{-b}{۲a}$

۳- اگر $\Delta<۰$، آن‌گاه معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

به جز روش کلی استفاده از Δ، استفاده از روش‌های زیر معمولاً راه‌های کوتاه‌تری در اختیار ما می‌گذارد:

۱- استفاده از اتحاد $x^۲+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

برای استفاده از این روش در معادله‌ای مانند $x^۲+bx+c=۰$، باید دو عدد α و β حدس بزنید که جمع آن‌ها b و ضرب آن‌ها c باشد.

۲- در حالت خاص $a+b+c=۰$ (یعنی وقتی مجموع ضرایب صفر باشد)، قطعاً یکی از ریشه‌ها $x=۱$ است (چرا؟)، و ریشه‌ی دیگر به وضوح با تجزیه‌ی عبارت برابر $\frac{c}{a}$ می‌شود.

۳- در حالت خاص $a-b+c=۰$ (یا $a+c=b$)، قطعاً یکی از ریشه‌ها $x=-۱$ است (چرا؟)، و ریشه‌ی دیگر به وضوح با تجزیه‌ی عبارت برابر $-\frac{c}{a}$ می‌شود.

دو عدد را x و y در نظر می‌گیریم. پس $x+y=۲۴$ و $xy=۱۴۳$. داریم:

$$y=۲۴-x\Rightarrow x(۲۴-x)=۱۴۳\Rightarrow x^۲-۲۴x+۱۴۳=۰\Rightarrow (x-۱۱)(x-۱۳)=۰\Rightarrow x_۱=۱۱\,,\;x_۲=۱۳$$

بنابراین $y_۱=۱۳$ و $y_۲=۱۱$، پس در هر حال اختلاف دو عدد برابر $۱۳-۱۱=۲$ است.

A **۲- گزینه‌ی (۳)** عدد را x می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$x+\frac{۱}{x}=\frac{۱۳}{۶}\Rightarrow x^۲+۱=\frac{۱۳}{۶}x\Rightarrow ۶x^۲-۱۳x+۶=۰\Rightarrow (۳x-۲)(۲x-۳)=۰\Rightarrow x_۱=\frac{۲}{۳}\,,\;x_۲=\frac{۳}{۲}$$

پاسخ $x=\frac{۲}{۳}$ (با توجه به فرض $x<۱$) قابل قبول است. بنابراین پاسخ تست $۳\times\frac{۲}{۳}=۲$ می‌شود.

A **۳- گزینه‌ی (۳)** دو عدد را x و y می‌گیریم. پس $y=\frac{۳}{۵}x$ و داریم:

$$x^۲+y^۲=۱۶۶۶\Rightarrow x^۲+\frac{۹}{۲۵}x^۲=۱۶۶۶\Rightarrow \frac{۳۴}{۲۵}x^۲=۱۶۶۶\Rightarrow x^۲=۴۹\times ۲۵$$

پس $x=۳۵$ و $y=\frac{۳}{۵}\times ۳۵=۲۱$، بنابراین: $x+y=۵۶$

A **۴- گزینه‌ی (۲)** دو عدد را x و $x+۱$ می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$x^{۲}+(x+۱)^{۲}=۹۲۵ \Rightarrow ۲x^{۲}+۲x-۹۲۴= \quad \Rightarrow x^{۲}+x-۴۶۲= \quad \Rightarrow (x+۲۲)(x-۲۱)=$$

با توجه به $x \in N$، پاسخ معادله $x=۲۱$ می‌شود، بنابراین پاسخ تست برابر است با: $۲۱+۲۲=۴۳$

B **۵- گزینه‌ی (۱)** اگر کل استخر همراه با پیاده‌روی دور آن را در نظر بگیریم، مستطیلی با طول $۴۰+۲x$ و عرض $۳۰+۲x$ به دست می‌آید. بنابراین طبق فرض داریم:

$$(۳۰+۲x)(۴۰+۲x)=۲۰۰۰ \Rightarrow (۱۵+x)(۲۰+x)=۵۰۰ \Rightarrow x^{۲}+۳۵x-۲۰۰= \quad \Rightarrow (x-۵)(x+۴۰)= \quad \Rightarrow x=۵$$

A **۶- گزینه‌ی (۲)** قرار می‌دهیم $x=۳-\sqrt{۵}$، پس داریم:

$$x-۳=-\sqrt{۵} \Rightarrow (x-۳)^{۲}=۵ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۹=۵ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۴=$$

A **۷- گزینه‌ی (۱)** در صورتی معادله‌ی درجه‌ی دوم دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد که $\Delta>$:

$$\Delta=۱۶-۴(m+۲)(m-۱) \xrightarrow{\Delta>} ۴-(m+۲)(m-۱)> \quad \Rightarrow m^{۲}+m-۶< \quad \Rightarrow (m+۳)(m-۲)< \quad \Rightarrow -۳<m<۲$$

A **۸- گزینه‌ی (۳)** باید $\Delta=$ تا معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف باشد:

$$\Delta= \quad \Rightarrow ۴-۴m(m-۲)= \quad \Rightarrow m(m-۲)=۱ \Rightarrow m^{۲}-۲m-۱= \quad \Rightarrow m=۱\pm\sqrt{۲}$$

B **۹- گزینه‌ی (۴)** معادله یک ریشه‌ی بدیهی $x=-۲$ دارد. پس باید معادله‌ی $x^{۲}-۲x+۴+m=$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و مخالف -۲ داشته باشد.

$$\Delta> \quad \Rightarrow ۴-۴(۴+m)> \quad \Rightarrow ۴+m<۱ \Rightarrow m<-۳$$

همچنین اگر $x=-۲$ ریشه‌ی معادله باشد، داریم: $۴+۴+۴+m=$ ، پس $m=-۱۲$، بنابراین باید $m\neq -۱۲$.

A **۱۰- گزینه‌ی (۴)** **(راه اول)**: اولاً باید $\Delta=$ تا چندجمله‌ای ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. ثانیاً باید $-\frac{۳}{۲a}=۲$ (مقدار ریشه‌ی مضاعف)، پس $a=-\frac{۳}{۴}$، داریم:

$$\Delta= \quad \Rightarrow ۹-۴ab= \quad \xrightarrow{a=\frac{-۳}{۴}} ۹+۳b= \quad \Rightarrow b=-۳ \Rightarrow ۴a-b=-۳+۳=$$

راه دوم: چندجمله‌ای را می‌توانیم به‌صورت $a(x-۲)^{۲}$ بنویسیم. بنابراین:

$$ax^{۲}-۴ax+۴a=ax^{۲}+۳x+b \Rightarrow -۴a=۳\ ,\ b=۴a \Rightarrow ۴a=b=-۳ \Rightarrow ۴a-b=$$

- هر چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ریشه‌های α و β را می‌توانیم به‌صورت $k(x-\alpha)(x-\beta)$ بنویسیم که $k\in R-\{\ \}$ عددی ثابت (در واقع همان ضریب $x^{۲}$) است.
- در حالت خاص هر چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ریشه‌ی مضاعف $x=\alpha$ را می‌توانیم به‌صورت $k(x-\alpha)^{۲}$ بنویسیم.

A **۱۱- گزینه‌ی (۴)** معادله باید به‌صورت زیر باشد:

$$k(x+۱)(x-\frac{۱}{۲})= \quad \Rightarrow k(x+۱)(۲x-۱)= \quad \Rightarrow k(۲x^{۲}+x-۱)=$$

به ازای $k=۲$ به معادله‌ی گزینه‌ی (۴) می‌رسیم.

B **۱۲- گزینه‌ی (۲)** باید معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، یعنی $\Delta=$:

$$(a-۴)^{۲}-۴(a-۱)(a+۷)= \quad \Rightarrow (a^{۲}-۸a+۱۶)-۴(a^{۲}+۶a-۷)= \quad \Rightarrow -۳a^{۲}-۳۲a+۴۴=$$

با محاسبه‌ی ریشه‌ها یا استفاده از روابط بین ریشه‌ها، حاصل جمع مقادیر a برابر $-\frac{۳۲}{۳}$ می‌شود.

B **۱۳- گزینه‌ی (۲)** اگر ریشه‌ی مشترک α باشد، α در دو معادله صدق می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{۲}+۲\alpha+a= \\ \alpha^{۲}-\alpha-۲a=\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق دو معادله}} ۲\alpha+a+\alpha+۲a= \quad \Rightarrow \alpha=-a$$

پس ریشه‌ی مشترک $-a$ است که باید در معادله صدق کند:

$$a^{۲}+۲(-a)+a= \quad \Rightarrow a^{۲}-a= \quad \Rightarrow a_{۱}= \quad ,\ a_{۲}=۱ \xrightarrow{a>} a=۱ \Rightarrow \alpha=-۱$$

D **۱۴- گزینه‌ی (۴)** دو ریشه‌ی معادله $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند. بنابراین باید یکی از این دو مقدار با Δ برابر باشد:

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\Delta\xrightarrow{\sqrt{\Delta}=u}\frac{-b\pm u}{۲a}=u^{۲}\Rightarrow ۲au^{۲}\pm u+b=$$

معادله‌ی آخر یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ بر حسب u است که با توجه به فرض تست قطعاً ریشه دارد، پس در آن داریم:

$$\Delta_{۲}\geq\quad\Rightarrow ۱-۴\times ۲a\times b\geq\quad\Rightarrow ۸ab\leq ۱\Rightarrow ab\leq\frac{۱}{۸}$$

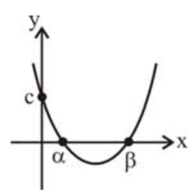
A **۱۵- گزینه‌ی (۳)**

نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۲}+bx+c$

هر چندجمله‌ای درجه‌ی دوم، در صفحه‌ی مختصات یک سهمی را مشخص می‌کند.

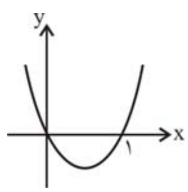
اگر $a>$ ، دهانه‌ی سهمی رو به بالا و اگر $a<$ ، رو به پایین است.

نقاط برخورد سهمی و محورها

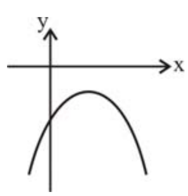


طول نقطه‌های برخورد سهمی متناظر $y=ax^{۲}+bx+c$ با محور طول‌ها، همان ریشه‌های معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=$ هستند.

همچنین نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها، عرضی برابر c (عدد ثابت چندجمله‌ای) دارد، زیرا از جای‌گذاری $x=$ در معادله‌ی آن به دست می‌آید.



با توجه به آن‌که ضابطه را می‌توانیم به‌صورت $y=x(x-۱)$ بنویسیم، سهمی در نقاط به طول $x=$ و $x=۱$ با محور طول‌ها برخورد می‌کند. همچنین چون ضریب $x^{۲}$ مثبت است، سهمی رو به بالاست. پس شکلی شبیه شکل روبه‌رو دارد.



B **۱۶- گزینه‌ی (۱)** برای آن‌که نمودار تابع زیر محور xها باشد، باید اولاً معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ای نداشته باشد (یعنی $\Delta<$)، ثانیاً دهانه‌ی سهمی رو به پایین باشد. از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $m-۱<$ ، پس $m<۱$. از شرط اول هم داریم:

$$\Delta<\quad\Rightarrow ۳-۴(m-۱)m<\quad\Rightarrow ۴m^{۲}-۴m-۳>\quad\Rightarrow(۲m-۳)(۲m+۱)>$$

$$\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}\text{ یا } m>\frac{۳}{۲}\xrightarrow{m<۱}m<-\frac{۱}{۲}$$

A **۱۷- گزینه‌ی (۳)** **راه اول:** چون نقاط $(۱,\ )$ و $(۴,\ )$ روی سهمی قرار دارند، به ازای $x=۱$ و $x=۴$ مقدار $ax^{۲}+bx-۴$ برابر صفر می‌شود. با حل دو معادله و دو مجهول مقادیر a و b پیدا می‌شوند.

راه دوم: سهمی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۴ با محور xها برخورد می‌کند، پس معادله‌ی $ax^{۲}+bx-۴=$ دو ریشه‌ی $x_{۱}=۱$ و $x_{۲}=۴$ دارد. بنابراین:

$$ax^{۲}+bx-۴=a(x-۱)(x-۴)\Rightarrow ax^{۲}+bx-۴=ax^{۲}-۵ax+۴a\Rightarrow ۴a=-۴\ ,\ b=-۵a\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=۵$$

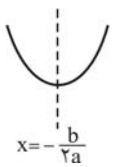
C **۱۸- گزینه‌ی (۱)** با توجه به نمودار، چندجمله‌ای دو ریشه دارد: $x_{۱}=-۱$ و $x_{۲}=۲$. بنابراین به‌صورت زیر قابل نوشتن است:

$$P(x)=a(x+۱)(x-۲)\xrightarrow[P(\ )=۲]{\text{طبق نمودار}}a(\ +۱)(\ -۲)=۲\Rightarrow a=-۱$$

پس $P(x)=-(x+۱)(x-۲)$. از طرفی واضح است که $۴c+۲b+a=۴P(\frac{۱}{۲})$، بنابراین:

$$۴c+۲b+a=-۴(\frac{۱}{۲}+۱)(\frac{۱}{۲}-۲)=۹$$

A **۱۹- گزینه‌ی (۳)**



در سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$، خط به معادله‌ی $x=\frac{-b}{۲a}$ همان محور تقارن سهمی است. محل برخورد محور تقارن و سهمی را رأس سهمی می‌گویند.

بنابراین طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است و عرض آن از جای‌گذاری این مقدار در ضابطه به دست می‌آید که برابر است با: $-\frac{\Delta}{۴a}$

معادله‌ی محور تقارن سهمی $x=-\frac{a}{۲\times ۱}$ است، بنابراین $-\frac{a}{۲}=-\frac{۱}{۲}$، پس $a=۱$.

A **۲۰- گزینه‌ی (۲)** توجه کنید که خط $x=۱$ محور تقارن سهمی است، بنابراین:

$$-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow ۲a+b=$$

B **۲۱- گزینه‌ی (۳)** عرض نقطه‌ی برخورد سهمی با محور yها، مقدار c است، با توجه به نمودار $c<$. چون دهانه‌ی سهمی رو به پایین است، پس $a<$. همچنین محور تقارن سهمی در سمت راست محور yها است، پس خط $x=-\frac{b}{۲a}$ در سمت راست محور yها است، بنابراین $-\frac{b}{۲a}>$ که با توجه به $a<$ نتیجه می‌گیریم $b>$.

B **۲۲- گزینه‌ی (۲)** چون $c<$ ، پس نقطه‌ی برخورد سهمی با محور yها بالاتر از مبدأ قرار دارد، بنابراین گزینه‌ی (۴) رد می‌شود. حال چون خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است و $-\frac{b}{۲a}<$ ، پس رأس سهمی باید در سمت چپ محور yها باشد، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نیز رد می‌شوند.

C **۲۳- گزینه‌ی (۲)** با توجه به آن‌که سهمی رو به بالاست، پس $a>$. سهمی محور yها را در عرضی مثبت قطع می‌کند، پس $c>$ ، در نتیجه $ac>$. حال چون محور تقارن سهمی در سمت راست محور yها قرار دارد، داریم:

$$-\frac{b}{۲a}> \xrightarrow{a>} b< \xrightarrow{a>} ab<$$

بنابراین از سه عبارت اولیه، یعنی ab، ac و b فقط ac مثبت است. از دو عبارت باقی‌مانده، یعنی $a+b+c$ و $a-b+c$، یکی برابر $f(۱)$ و دیگری برابر $f(-۱)$ است. با توجه به نمودار $f(۱)<$ و $f(-۱)>$. پس از بین ۵ عبارت مورد نظر تنها $ac>$ و $a-b+c>$.

B **۲۴- گزینه‌ی (۳)** اگر طول دو ضلع را a و b بگیریم، داریم: $۲(a+b)=۱۲$، بنابراین:

$$a+b=۶\Rightarrow b=۶-a\xrightarrow{S=ab}S=a(۶-a)$$

S بر حسب a یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ است که دو ریشه‌ی $a_۱=$ و $a_۲=۶$ دارد. همچنین به وضوح سهمی متناظر آن رو به پایین است (ضریب منفی برای $a^۲$). بنابراین گزینه‌ی ۱ یا ۳ درست است. چون همواره $S>$ (زیرا به مساحت مستطیل اشاره دارد)، پس گزینه‌ی ۱ رد می‌شود.

C **۲۵- گزینه‌ی (۲)** با توجه به $a>$ ، نمودار سهمی رو به بالا است و چون ریشه ندارد، همواره بالای محور xها است. پس همواره $P(x)>$ ، بنابراین $P(\frac{۱}{۴})>$ و داریم:

$$P(\frac{۱}{۴})> \Rightarrow \frac{a}{۱۶}+\frac{b}{۴}+c> \Rightarrow a+۴b+۱۶c>$$

پس مقدار عبارت $a+۴b+۱۶c$ می‌تواند ۱ یا ۲ باشد.

B **۲۶- گزینه‌ی (۳)** طول رأس سهمی برابر است با: $-\frac{-۲a}{۲a}=۱$، بنابراین عرض آن برابر است با:

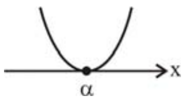
$$a^۲-۲a+۴a+۱=(a+۱)^۲\Rightarrow (a+۱)^۲=۴\Rightarrow a+۱=\pm ۲\Rightarrow a_۱=۱\,,\,a_۲=-۳$$

چون سهمی ماکزیمم دارد، پس رو به پایین است، بنابراین $a<$ ، در نتیجه $a=-۳$. حال واضح است که سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $۴a+۱=-۱۱$ قطع می‌کند.

B **۲۷- گزینه‌ی (۲)** با توجه به این که نقطه‌ی $(۱,۸)$ رأس سهمی است، می‌توانیم معادله‌ی سهمی را به شکل کلی $y=a(x-۱)^۲+۸$ در نظر بگیریم. حال با توجه به آن‌که سهمی از نقطه‌ی $(,۱۷)$ می‌گذرد داریم:

$$۱۷=a+۸\Rightarrow a=۹\Rightarrow y=۹x^۲-۱۸x+۱۷$$

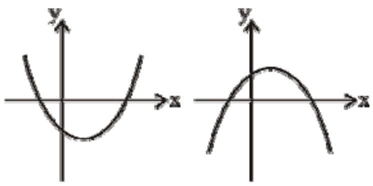
C **۲۸- گزینه‌ی (۲)** اگر قرار دهیم $f(x)=x^۲-۲ax+b+۳$، چون $f(x)$ ریشه‌ی مضاعف دارد، نمودار آن شبیه شکل روبه‌رو می‌شود. نمودار $g(x)=x^۲-۲ax+b+۱$ همان نمودار f است که ۲ واحد به پایین انتقال یافته (چون $g(x)=f(x)-۲$)، پس در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند و دو ریشه‌ی متمایز دارد.



بررسی گزینه‌های دیگر:

معادله‌ی گزینه‌ی (۱) ریشه ندارد، چون نمودار چندجمله‌ای متناظر آن از انتقال نمودار f به بالا حاصل می‌شود. معادله‌ی گزینه‌ی (۳) ریشه‌ی مضاعف دارد، چون همان Δ معادله‌ی صورت سؤال را دارد. وضعیت معادله‌ی گزینه‌ی (۴) نیز نامشخص است، زیرا با توجه به فرض سؤال داریم $a^۲=b+۳$، که در نتیجه در گزینه‌ی (۴) داریم: $\Delta=-۳(b+۳)$ که بنا به مقادیر مختلف b، علامت‌های مختلفی خواهد داشت.

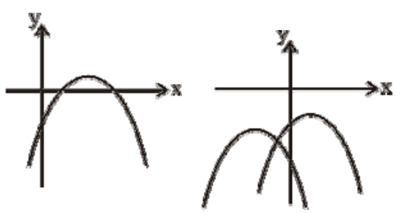
C **۲۹- گزینه‌ی (۲) راه اول:** نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ در دو حالت از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد. یکی حالتی که سهمی رو به بالا است و محور yها را در عرضی منفی قطع می‌کند (یعنی $a>$ و $c<$) و حالت دوم، حالتی که سهمی رو به پایین است و محور yها را در عرضی مثبت قطع می‌کند (یعنی $a<$ و $c>$). در هر دو حالت داریم: $ac<$. بنابراین در این تست باید $m(m-۱)<$، در نتیجه $<m<۱$.



راه دوم: مطابق شکل‌ها، فقط وقتی سهمی از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد که دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف داشته باشد.

پس حاصل‌ضرب دو ریشه عددی منفی است، یعنی $\frac{c}{a}<$ که نتیجه می‌دهد $ac<$.

C **۳۰- گزینه‌ی (۲)** برای برقراری شرایط تست باید در یکی از حالت‌های روبه‌رو باشیم. در هر حالت اولاً سهمی با محور yها در عرضی منفی یا صفر برخورد می‌کند، ثانیاً رأس سهمی در ناحیه‌ی دوم قرار نمی‌گیرد.



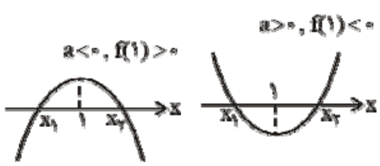
برای برقراری شرط اول باید $a^۲-۴\le$، پس $-۲\le a\le ۲$. برای برقراری شرط دوم، می‌دانیم طول رأس سهمی $x_S=-\frac{a}{-۲}$ و عرض آن $y_S=-\frac{\Delta}{-۴}$ است. حالتی را بررسی می‌کنیم که رأس سهمی در ناحیه‌ی دوم می‌افتد، یعنی $x_S<$ و $y_S>$:

$$\left.\begin{array}{l} x_S< \Rightarrow \frac{a}{۲}< \Rightarrow a< \\ y_S> \Rightarrow \frac{\Delta}{۴}> \Rightarrow \Delta> \Rightarrow a^۲+۴(a^۲-۴)> \Rightarrow a^۲>\frac{۱۶}{۵} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین باید $a\ge-\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ که با توجه به شرط $-۲\le a\le ۲$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le a\le ۲$. پس اعداد صحیح $\{-۱, ,۱,۲\}$ می‌توانند به جای a قرار بگیرند.

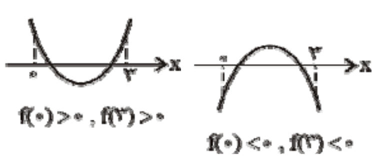
C **۳۱- گزینه‌ی (۴)** یکی از دو حالت روبه‌رو باید رخ دهد. در هر دو حالت داریم $a\times f(۱)<$ (که داریم $f(x)=ax^۲-۳ax+۱$). بنابراین:

$$a\times(a-۳a+۱)< \Rightarrow a(-۲a+۱)< \Rightarrow a< \text{ یا } a>\frac{۱}{۲}$$



D **۳۲- گزینه‌ی (۱)** یکی از دو حالت روبه‌رو ممکن است پیش بیاید. در هر دو حالت داریم $f( )f(۳)>$ (که $f(x)=(۲m+۳)x^۲-۶x+(۲m+۳)$). داریم: $f( )=۲m+۳$ و $f(۳)=۲۰m+۱۲$، بنابراین:

$$(۲m+۳)(۲۰m+۱۲)> \Rightarrow (۲m+۳)(۵m+۳)> \Rightarrow m<-\frac{۳}{۲} \text{ یا } m>-\frac{۳}{۵}$$



از طرفی برای آن‌که معادله دو ریشه داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\Delta> \Rightarrow ۳۶-۴(۲m+۳)^۲> \Rightarrow ۹-(۲m+۳)^۲> \Rightarrow (۲m+۶)(-۲m)> \Rightarrow -۳<m<$$

از طرفی باید محور تقارن سهمی، یعنی $x=\frac{۳}{۲m+۳}$ بین $x=$ و $x=۳$ باشد. پس $<\frac{۳}{۲m+۳}<۳$، در نتیجه $m>-۱$ که اشتراک آن با جواب‌های قبل $\frac{-۳}{۵}<m<$ می‌شود.

D **۳۳- گزینه‌ی (۳)** از این که مبدأ مختصات وسط AB است، نتیجه می‌گیریم $x_A + x_B =$ و $y_A + y_B =$. حال با توجه به آن‌که نقاط روی سهمی‌اند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y_A = ۲x_A^۲ + ۴x_A - ۲ \\ y_B = ۲x_B^۲ + ۴x_B - ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{y_A+y_B=} ۲(x_A^۲ + x_B^۲) + ۴(x_A + x_B) - ۴ = \xrightarrow{x_A+x_B=} x_A^۲ + x_B^۲ = ۲$$

$$x_A^۲ + x_B^۲ = ۲ \Rightarrow (x_A + x_B)^۲ - ۲x_A x_B = ۲ \xrightarrow{x_A+x_B=} x_A x_B = -۱$$

از دو نتیجه‌ی $x_A + x_B =$ و $x_A x_B = -۱$ به دست می‌آوریم: $x_A = ۱$ و $x_B = -۱$ (یا برعکس). در هر حال دو نقطه دارای مختصات $(۱,۴)$ و $(-۱,-۴)$ می‌شوند که فاصله‌ی آن‌ها برابر است با: $\sqrt{۲^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷}$

D **۳۴- گزینه‌ی (۱)** باید معادله‌ی $f(x) = g(x)$ جواب نداشته باشد:

$$x^۲ - ۲ax + ۱ = ۲ab - ۲bx \Rightarrow x^۲ - ۲(a-b)x + ۱ - ۲ab = \xrightarrow{\Delta<} (a-b)^۲ - (۱ - ۲ab) < \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۱ <$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ < ۱$$

نقاط دارای مختصات (a,b) با شرط $a^۲ + b^۲ < ۱$، در صفحه‌ی مختصات داخل دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ را مشخص می‌کنند که مساحت آن برابر است با π.

A **۳۵- گزینه‌ی (۱)**

روابط بین ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c =$، ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، داریم:

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_۱x_۲ = \frac{c}{a} \quad , \quad |x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

با توجه به روابط بین ریشه‌ها داریم: $x_۱ + x_۲ = -۱$ و $x_۱x_۲ = k$، بنابراین:

$$k \times k + (-۱) = ۳ \Rightarrow k^۲ = ۴ \Rightarrow k = \pm ۲$$

به ازای $k = ۲$ معادله‌ی $x^۲ + x + ۲ =$ ریشه‌ی حقیقی ندارد، پس فقط $k = -۲$ قابل قبول است.

A **۳۶- گزینه‌ی (۳)** مقدار $(x_۱ + x_۲)^۳$ را می‌خواهیم. طبق روابط بین ریشه‌ها داریم $x_۱ + x_۲ = -۳$، پس پاسخ تست ۲۷- می‌شود.

A **۳۷- گزینه‌ی (۳)** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم k و k' ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ + ۴x - a =$ هستند. پس طبق روابط بین ریشه‌ها:

$$k + k' = -\frac{۴}{۲} = -۲$$

A **۳۸- گزینه‌ی (۱)** معادله را ساده می‌کنیم:

$$۱۶x^۲ - ۲۴x + ۹ = ۵۶x^۲ - ۵۸x + ۱۲ \Rightarrow ۴۰x^۲ - ۳۴x + ۳ =$$

حاصل جمع ریشه‌های معادله برابر است با: $-\frac{-۳۴}{۴۰} = \frac{۱۷}{۲۰} = ۰/۸۵$

A **۳۹- گزینه‌ی (۲)** عبارت را می‌توانیم به‌صورت $۲(x_۱ + x_۲) - ۲x_۱x_۲$ بنویسیم که طبق روابط بین ریشه‌ها برابر است با: $۲ \times ۷ + ۲ = ۱۶$

A **۴۰- گزینه‌ی (۱)** مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌اند، پس طبق روابط بین ریشه‌ها $x_۱ + x_۲ = -۶$ و $x_۱x_۲ = m$. حال داریم:

$$۲x_۲ = x_۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۳x_۲ \Rightarrow ۳x_۲ = -۶ \Rightarrow x_۲ = -۲ \xrightarrow{x_۱=۲x_۲} x_۱ = -۴ \xrightarrow{x_۱x_۲=m} m = (-۴)(-۲) = ۸$$

B **۴۱- گزینه‌ی (۴)** ریشه‌ها را α و β می‌نامیم و فرض می‌کنیم $\alpha = \beta + ۲$. طبق روابط بین ریشه‌ها $\alpha\beta = \frac{m}{۳}$ و $\alpha + \beta = ۵$. حال داریم:

$$\alpha = \beta + ۲ \Rightarrow \alpha + \beta = ۲\beta + ۲ \xrightarrow{\alpha+\beta=۵} ۲\beta + ۲ = ۵ \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a=\beta+۲} \alpha = \frac{۷}{۲} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{۲۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=\frac{m}{۳}} \frac{m}{۳} = \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow m = \frac{۶۳}{۴}$$

B **۴۲- گزینه‌ی (۳)** طبق روابط بین ریشه ها داریم: $x_۱x_۲ = ۱۶$ و $x_۱ + x_۲ = ۵m$. حال داریم:

$$x_۱^۳ = x_۲ \xrightarrow{\times x_۱} x_۱^۴ = x_۱x_۲ \xrightarrow{x_۱x_۲=۱۶} x_۱^۴ = ۱۶ \Rightarrow x_۱ = \pm ۲ \xrightarrow{x_۱>} x_۱ = ۲$$

پس $x_۱ = ۲$، بنابراین $x_۲ = ۸$ و $x_۱ + x_۲ = ۱۰$. در نتیجه $۵m = ۱۰$ و $m = ۲$.

B ۴۳- گزینه‌ی (۱) باید جمع دو ریشه برابر صفر باشد. طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$x_1 + x_2 = -(m^3 - m) \Rightarrow m^3 - m = \quad \Rightarrow m(m^2 - 1) = \quad \Rightarrow m = \quad , \pm 1$$

با صفر شدن ضریب x معادله به $x^2 + 3m + 1 =$ تبدیل می‌شود که برای ریشه داشتن باید $3m + 1 <$ ، پس جواب‌های $m =$ و $m = 1$ غیر قابل قبول‌اند.

B ۴۴- گزینه‌ی (۴) اگر علامت‌های دو ریشه مختلف باشد، پس $x_1 x_2 <$ ، بنابراین طبق روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$\frac{m-2}{m} < \quad \Rightarrow m < \quad \text{یا} \quad m > 2$$

دقت کنید که وقتی در معادله‌ی $ax^2 + bx + c =$ ، ضرایب a و c علامت‌های مختلفی دارند. داریم $\Delta >$ ، پس دیگر نیازی به بررسی شرط $\Delta >$ نداریم.

B ۴۵- گزینه‌ی (۳) باید $\Delta >$ و همچنین $x_1 + x_2 >$ و $x_1 x_2 >$. داریم:

$$\Delta = 4(1 - m(2m-1)) \xrightarrow{\Delta >} -2m^2 + m + 1 > \quad \Rightarrow (2m+1)(m-1) < \quad \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 1$$

حال چون $x_1 + x_2 = -\frac{2}{m}$ و $x_1 x_2 = \frac{2m-1}{m}$ ، داریم:

$$-\frac{2}{m} > \quad , \frac{2m-1}{m} > \quad \Rightarrow m < \quad , (m < \quad \text{یا} \quad m > \frac{1}{2}) \Rightarrow m <$$

اشتراک دو جواب $-\frac{1}{2} < m <$ می‌شود.

B ۴۶- گزینه‌ی (۳) اگر دو ریشه x_1 و x_2 باشند و بدانیم $x_1 <$ و $x_2 >$ ، طبق فرض $|x_1| < |x_2|$ ، پس $x_2 > -x_1$ ، یعنی $x_1 + x_2 >$. به این ترتیب اولاً باید $x_1 x_2 <$ (که هم‌زمان نتیجه می دهد معادله دارای ریشه نیز هست)، ثانیاً باید $x_1 + x_2 >$. چون $x_1 x_2 = -\frac{1}{m^2}$ و $x_1 + x_2 = \frac{4}{m^2}$ هر دو شرط همواره برقرار است.

A ۴۷- گزینه‌ی (۴)

> **محاسبه‌ی مقدار عبارات متقارن درباره‌ی ریشه‌های معادله**
>
> معمولاً یک عبارت متقارن بر حسب x_1 و x_2 را می‌توانیم بر حسب مجموع $S = x_1 + x_2$ و حاصل‌ضرب $P = x_1 x_2$ بنویسیم. در این صورت با روابط بین ریشه‌ها مقدار S و P و در نتیجه مقدار عبارت قابل محاسبه است. دو اتحاد زیر نیز اتحادهای پر کاربردی در این زمینه هستند:
>
> $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \quad , \quad x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$

می‌دانیم $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$ ، بنابراین:

$$x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 \xrightarrow[P=6]{S=3\sqrt{3}} x_1^4 + x_2^4 = (27 - 12)^2 - 2 \times 36 = 153$$

B ۴۸- گزینه‌ی (۲) با توجه به معادله داریم: $x_1 + x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x_1 x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. حال عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) = (-\frac{1}{\sqrt{3}})((\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}) = (-\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}})$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{2\sqrt{3}+1}{3}) = -\frac{\sqrt{3}+6}{9}$$

A ۴۹- گزینه‌ی (۴) با مجذور کردن دو طرف تساوی $\sqrt{x'} + \sqrt{x''} = 2m$ نتیجه می‌گیریم:

$$x' + x'' + 2\sqrt{x'x''} = 4m^2 \xrightarrow[x'x''=1]{x'+x''=6} 6 + 2 = 4m^2 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

واضح است که $m >$ (جمع دو عبارت نامنفی)، پس $m = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

B ۵۰- گزینه‌ی (۴) از فرض مسأله داریم $\alpha + \beta = -1$ و $\alpha\beta = -3$. حال داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)\alpha\beta = (-1)^3 - 3 \times (-1)(-3) = -10$$

$$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2\alpha^3\beta^3 = (-10)^2 - 2(-3)^3 = 154$$

عبارت مورد نظر را می‌توانیم به‌صورت $\alpha^6 + \beta^6 + \alpha^3 + \beta^3$ بنویسیم که حاصل آن $154 - 10 = 144$ می‌شود.

۵۱- گزینه‌ی (۱) اگر قرار دهیم $A =|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ داریم: A

$$A^۲=(\sqrt{x'}-\sqrt{x''})^۲=x'+x''-۲\sqrt{x'x''}\xrightarrow[x'x''=۱]{x'+x''=۴}A^۲=۴-۲=۲\xrightarrow{A>}A=\sqrt{۲}$$

۵۲- گزینه‌ی (۱) می‌توانید از روابط بین ریشه‌ها استفاده کنید، ولی برای راه کوتاه‌تر توجه کنید که معادله را می‌توانیم به‌صورت $(x-۱)(x-\sqrt{۳})=$ بنویسیم، پس ریشه‌های آن ۱ و $\sqrt{۳}$ می‌شود. حال داریم: B

$$A=|۱-\sqrt{\sqrt{۳}}|+۱+\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{۳}-۱+۱+\sqrt[۴]{۳}=۲\sqrt[۴]{۳}$$

۵۳- گزینه‌ی (۴) می‌توانید عبارت را به‌صورت $\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}$ بنویسید و از روابط بین ریشه‌ها استفاده کنید. اما با کمی دقت متوجه می‌شوید که $x=a^۲$ در معادله صدق می‌کند، پس یک ریشه $x_۱=a^۲$ است و چون $x_۱+x_۲=\frac{۱}{a^۴}+a^۲$، ریشه‌ی دیگر نیز $x_۲=\frac{۱}{a^۴}$ خواهد شد. به این ترتیب داریم: B

$$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=a^۶+\frac{۱}{a^۶}$$

۵۴- گزینه‌ی (۲) با توجه به روابط بین ریشه‌ها داریم: $x_۱+x_۲=m+۳$ و $x_۱x_۲=m^۲$. حال طبق فرض داریم: D

$$(x_۱+x_۲)m^۲-۳(x_۱^۲+x_۲^۲)=\ \Rightarrow m^۲(m+۳)-۳((m+۳)^۲-۲m^۲)=\ \Rightarrow m^۳+۶m^۲-۱۸m-۲۷=$$

$$\Rightarrow (m^۳-۲۷)+۶m(m-۳)=\ \Rightarrow (m-۳)(m^۲+۳m+۹+۶m)=\ \Rightarrow (m-۳)(m^۲+۹m+۹)=$$

معادله‌ی $m^۲+۹m+۹=$ دو ریشه‌ی $\frac{-۹\pm\sqrt{۴۵}}{۲}$ را دارد. پس $m=۳$ یا $\frac{-۹\pm\sqrt{۴۵}}{۲}$. از فرض $\Delta>$ نتیجه می‌گیریم $-۱<m<۳$، ولی هر سه مقدار به‌دست آمده در خارج این فاصله قرار دارند، پس هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

۵۵- گزینه‌ی (۳) معادله دو ریشه در بازه‌ی $(\ ,۱)$ دارد (زیرا جمع آن‌ها $\frac{۶}{۷}$ و ضرب آن‌ها $\frac{۱}{۷}$ است). وقتی عددی در این فاصله به توان بزرگ‌تر می‌رسد، مقدارش کوچک‌تر می‌شود، پس داریم: C

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۳]{x_۱}>\sqrt{x_۱}>x_۱\\ \sqrt[۳]{x_۲}>\sqrt{x_۲}>x_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}>\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}>x_۱+x_۲$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند، حال توجه کنید که:

$$x_۱+x_۲=\frac{۶}{۷}\,,\ x_۱x_۲=\frac{۱}{۷}\Rightarrow x_۱x_۲+x_۱+x_۲=۱\Rightarrow x_۱(۱+x_۲)=۱-x_۲$$

۵۶- گزینه‌ی (۲) B

محاسبه‌ی عبارات غیر متقارن بر حسب ریشه‌ها

در محاسبه‌ی مقدار عبارات غیر متقارن بر حسب $x_۱$ و $x_۲$، معمولاً با صدق دادن ریشه‌ها در معادله، عبارات غیر متقارن را به متقارن تبدیل می‌کنیم. مثلاً اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۵x+۱=$ باشد، می‌توانیم به جای $\alpha^۲$ قرار دهیم $۵\alpha-۱$، زیرا $\alpha^۲-۵\alpha+۱=$ (صدق دادن α در معادله).

با توجه به آن‌که $x_۱$ ریشه‌ی معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$x_۱^۲+x_۱-۱=\ \Rightarrow x_۱^۲+x_۱=۱\Rightarrow ۲x_۱^۲+۲x_۱=۲$$

پس عبارت مورد نظر برابر $(x_۱+x_۲)^۲+۲$ می‌شود که برابر است با: $(-۱)^۲+۲=۳$

۵۷- گزینه‌ی (۳) چون $x_۲$ در معادله صدق می‌کند، داریم: B

$$x_۲^۲-۳x_۲+۱=\ \Rightarrow x_۲^۲=۳x_۲-۱$$

پس مقدار عبارت زیر را می‌خواهیم:

$$\sqrt{x_۱^۲x_۲^۲}=|x_۱x_۲|\xrightarrow{x_۱x_۲=۱}۱$$

B **۵۸- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که x_1 در معادله صدق می‌کند، داریم: $x_1^2+x_1-1=0$، پس $x_1^2=-x_1+1$. به همین ترتیب $x_2^2=-x_2+1$ و عبارت به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A=5(-x_1+1)+3(-x_2+1)=-2x_1-3(x_1+x_2)+8\xrightarrow{x_1+x_2=-1}A=-2x_1+11$$

حال چون ریشه‌های معادله برابرند با $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$، پس $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$، در نتیجه: $A=1+\sqrt{5}+11=12+\sqrt{5}$

C **۵۹- گزینه‌ی (۴)** با توجه به آن‌که α در معادله صدق می‌کند، داریم:

$$\alpha^2+\alpha-3=0\Rightarrow\alpha^3+\alpha^2-3\alpha=0\Rightarrow\alpha^3=-\alpha^2+3\alpha$$

چون α در معادله صدق می‌کند، پس $\alpha^2+\alpha-3=0$، در نتیجه $-\alpha^2=\alpha-3$، پس با جای‌گذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\alpha^3=(\alpha-3)+3\alpha=4\alpha-3$$

به همین ترتیب برای β داریم: $\beta^2=-\beta+3$، بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با:

$$4\alpha-3-4(-\beta+3)+20=4(\alpha+\beta)+5\xrightarrow{\alpha+\beta=-1}4\times(-1)+5=1$$

C **۶۰- گزینه‌ی (۳)** چون a ریشه‌ی معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$(a+2)^2+a+1=0\Rightarrow(a+2)^2=-(a+1)\Rightarrow(a+2)^3=-(a+1)(a+2)=-a^2-3a-2$$

به همین ترتیب $(b+2)^3=-b^2-3b-2$، پس حاصل عبارت زیر را می‌خواهیم:

$$-(a^2+b^2)-3(a+b)-4=-(S^2-2P)-3S-4=-S^2-3S+2P-4$$

چون معادله به‌صورت $x^2+5x+5=0$ قابل نوشتن است، داریم $S=-5$ و $P=5$، پس مقدار عبارت برابر $-25+15+10-4=-4$ می‌شود.

B **۶۱- گزینه‌ی (۱)** رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(x_1+x_2)-5x_1x_2+x_1=0\xrightarrow[x_1x_2=m-1]{x_1+x_2=2m-3}2(2m-3)-5(m-1)+x_1=0\Rightarrow x_1=m+1$$

x_1 در معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$(m+1)^2-(2m-3)(m+1)+m-1=0\Rightarrow -m^2+4m+3=0\Rightarrow m=2\pm\sqrt{7}$$

D **۶۲- گزینه‌ی (۱)** اگر معادله را به‌صورت $f(x)=0$ در نظر بگیریم، $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ با ریشه‌های α و β است، پس به‌صورت $k(x-\alpha)(x-\beta)$ قابل نوشتن است که چون ضریب درجه‌ی x^2 در آن ۱ است، داریم $k=1$، بنابراین $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$. حال دقت کنید که: $(\alpha-2)(\beta-2)=(2-\alpha)(2-\beta)=f(2)$

به همین ترتیب مخرج کسرهای دیگر نیز برابر $f(-1)$ و $f(3)$ می‌شود. پس باید مقدار $\frac{1}{f(-1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}$ را حساب کنیم. با توجه به ضابطه‌ی تابع داریم: $f(-1)=12$، $f(2)=-3$ و $f(3)=4$، پس مقدار عبارت $\frac{1}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=0$ می‌شود.

D **۶۳- گزینه‌ی (۲)** با ضرب دو طرف دو تساوی در یکدیگر به دست می‌آوریم: (دقت کنید که چون $c\neq0$، پس $x_1\,,\,x_2\neq0$)

$$\frac{2x_1^3\times2x_2^3}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=(x_1x_2)^2\xrightarrow{x_1\,,\,x_2\neq0}4x_1x_2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_1x_2=1\end{cases}$$

پس $x_1=x_2=1$ یا $x_1=x_2=-1$ که حالت دوم در تساوی‌ها صدق نمی‌کند، پس $x_1=x_2=1$. به این ترتیب داریم: $-\frac{b}{a}=x_1+x_2=2$ و $\frac{c}{a}=x_1x_2=1$. عبارت را نیز به‌صورت $4+\frac{b}{a}+4\frac{c}{a}$ می‌توانیم بنویسیم که برابر است با: $4-2+4=6$

B **۶۴- گزینه‌ی (۲)**

ساختن معادله‌ی درجه‌ی ۲ از روی ریشه‌ها

- اگر α و β دو عدد حقیقی باشند و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی $x^2-Sx+P=0$، همان α و β است.
- معادله‌ی درجه‌ی دوم با ریشه‌های α و β را به روش دیگری نیز می‌توانیم تشکیل بدهیم، با تشکیل معادله‌ی $(x-\alpha)(x-\beta)=0$.

اگر ریشه‌های معادله‌ی اول را x' و x'' و ریشه‌های معادله‌ی جدید را α و β بنامیم، داریم: $x'x''=4$ و $x'+x''=3\sqrt{2}$.

چون $\alpha=x'^2$ و $\beta=x''^2$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=18-8=10\quad,\quad P=\alpha\beta=x'^2x''^2=(x'x'')^2=16$$

پس معادله‌ی مطلوب $x^2-10x+16=0$ می‌شود.

۶۵- گزینه‌ی (۱) معادله‌ای تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن دو واحد کم‌تر از ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۵x + ۱ =$ باشند. B

راه اول: اگر ریشه‌های معادله‌ی اول $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم: $x_۱ + x_۲ = \frac{۵}{۲}$ و $x_۱x_۲ = \frac{۱}{۲}$. ریشه‌های معادله‌ی جدید را α و β می‌نامیم. بنابراین $\alpha = x_۱ - ۲$ و $\beta = x_۲ - ۲$. حال داریم:

$$S = \alpha + \beta = x_۱ + x_۲ - ۴ = \frac{۵}{۲} - ۴ = -\frac{۳}{۲}$$

$$P = \alpha\beta = (x_۱ - ۲)(x_۲ - ۲) = x_۱x_۲ - ۲(x_۱ + x_۲) + ۴ = \frac{۱}{۲} - ۲ \times \frac{۵}{۲} + ۴ = -\frac{۱}{۲}$$

پس معادله‌ی جدید به‌صورت زیر می‌شود:

$$x^۲ + \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲} = \ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x - ۱ = \ \Rightarrow k = ۱$$

راه دوم: فرض می‌کنیم ریشه‌ی معادله‌ی جدید α باشد و ریشه‌ی معادله‌ی اول x'، پس $\alpha = x' - ۲$، بنابراین $x' = \alpha + ۲$. عدد x' در معادله‌ی اول صدق می‌کند، پس داریم:

$$۲x'^۲ - ۵x' + ۱ = \ \xrightarrow{x' = \alpha + ۲} ۲(\alpha + ۲)^۲ - ۵(\alpha + ۲) + ۱ = \ \Rightarrow ۲\alpha^۲ + ۳\alpha - ۱ =$$

α ریشه‌ی معادله‌ی $۲x^۲ + ۳x - k =$ است که با مقایسه‌ی آن با نتیجه‌ی بالا داریم: $k = ۱$

۶۶- گزینه‌ی (۲) **راه اول:** قرار می‌دهیم $\alpha = ۲x_۱ + ۵$ و $\beta = ۲x_۲ + ۵$ و با استفاده از روابط بین ریشه‌ها مقادیر $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ را به دست می‌آوریم. B

راه دوم: فرض می‌کنیم $\alpha = ۲x + ۵$ ریشه‌ی معادله‌ی جدید باشد. پس $x = \frac{\alpha - ۵}{۲}$ و چون x در معادله‌ی اول صدق می‌کند، داریم:

$$۲(\frac{\alpha - ۵}{۲})^۲ - ۱۶(\frac{\alpha - ۵}{۲}) + ۳۰ = \ \Rightarrow (\alpha - ۵)^۲ - ۱۶(\alpha - ۵) + ۶۰ = \ \Rightarrow \alpha^۲ - ۲۶\alpha + ۱۶۵ =$$

۶۷- گزینه‌ی (۱) می‌خواهیم $x' = -\frac{۱}{\alpha}$ ریشه‌ی معادله‌ی جدید باشد. داریم $\alpha = -\frac{۱}{x'}$ و می دانیم α در معادله صدق می‌کند: B

$$a(-\frac{۱}{x'})^۲ + b(\frac{-۱}{x'}) + c = \ \Rightarrow \frac{a}{x'^۲} - \frac{b}{x'} + c = \ \Rightarrow a - bx' + cx'^۲ =$$

پس معادله‌ی جدید $cx^۲ - bx + a =$ خواهد بود.

۶۸- گزینه‌ی (۴) ریشه‌های معادله‌ی جدید را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم و حاصل جمع و حاصل‌ضرب آن‌ها را به دست می‌آوریم: B

$$x_۱ + x_۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\alpha\beta = (\alpha + \beta)^۲ = (-p)^۲ = p^۲$$

$$x_۱x_۲ = (\alpha^۲ + \alpha\beta)(\beta^۲ + \alpha\beta) = \alpha\beta(\alpha + \beta)^۲ = q(-p)^۲ = qp^۲$$

پس معادله‌ی جدید $x^۲ - p^۲x + qp^۲ =$ می‌شود.

۶۹- گزینه‌ی (۴) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم: A

$$(x^۲ - ۳)^۲ = (x + ۱)^۲ \Rightarrow (x^۲ - ۳)^۲ - (x + ۱)^۲ = \ \Rightarrow (x^۲ - x - ۴)(x^۲ + x - ۲) =$$

هر یک از دو معادله‌ی $x^۲ - x - ۴ =$ و $x^۲ + x - ۲ =$ دو ریشه دارند. چون ریشه‌ی مشترکی ندارند، پس روی هم ۴ ریشه داریم.

۷۰- گزینه‌ی (۲) باید ببینیم معادله‌ی $f(x^۲) = f(x)$ چند ریشه‌ی صحیح دارد: B

$$x^۴ + x^۲ + a = x^۲ + x + a \Rightarrow x^۴ - x = \ \Rightarrow x(x^۳ - ۱) = \ \Rightarrow x = \ , ۱$$

۷۱- گزینه‌ی (۳) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم: B

$$۱۶(x^۳ + ۱) - ۱۳(x + ۱) = \ \Rightarrow (x + ۱)(۱۶(x^۲ - x + ۱) - ۱۳) = \ \Rightarrow (x + ۱)(۱۶x^۲ - ۱۶x + ۳) =$$

معادله‌ی $۱۶x^۲ - ۱۶x + ۳ =$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد که هیچ‌کدام ۱- نیست، پس معادله‌ی اصلی روی هم ۳ ریشه دارد.

۷۲- گزینه‌ی (۲) معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم: D

$$x^۴ - ۷x^۲ - ۴x + ۵ = \ \Rightarrow x^۴ - ۶x^۲ + ۹ - x^۲ - ۴x - ۴ = \ \Rightarrow (x^۲ - ۳)^۲ - (x + ۲)^۲ = \ \Rightarrow (x^۲ - x - ۵)(x^۲ + x - ۱) =$$

هر یک از دو عبارت بالا دو ریشه دارد. چون ریشه‌ی مشترکی ندارند، پس روی هم ۴ ریشه داریم.

C **۷۳- گزینه‌ی (۴)** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(x^۴-۱)+bx(x^۲-۱)= \Rightarrow (x^۲-۱)(۲x^۲+bx+۲)= \Rightarrow (x^۲-۱)f(x)=$$

برای آن‌که معادله فقط همان دو ریشه‌ی $x=\pm۱$ (برای $x^۲-۱=$) را داشته باشد، برای $f(x)=۲x^۲+bx+۲$ دو حالت داریم: یکی آن‌که $f(x)$ ریشه نداشته باشد و دوم آن‌که ریشه‌های $f(x)$ همان ±۱ باشند.

$$۱)\ b^۲-۱۶< \Rightarrow -۴<b<۴$$

$$۲)\begin{cases} f(۱)= \Rightarrow ۲+b+۲= \Rightarrow b=-۴ \Rightarrow f(x)=۲(x-۱)^۲ \\ f(-۱)= \Rightarrow f(x)=۲(x+۱)^۲\ ,\ b=۴ \end{cases}$$

B **۷۴- گزینه‌ی (۲)** معادله را به‌صورت $(x^۲-۴)(x^۲+۱)=۱$ می‌نویسیم. حال قرار می‌دهیم $t=x^۲$، داریم:

$$(t-۴)(t+۱)=۱ \Rightarrow t^۲-۳t-۵= \Rightarrow t_۱=\frac{۳+\sqrt{۲۹}}{۲}\ ,\ t_۲=\frac{۳-\sqrt{۲۹}}{۲}$$

چون $t=x^۲$ پس $t\ge$، بنابراین معادله‌ی $x^۲=\frac{۳-\sqrt{۲۹}}{۲}$ جواب ندارد. ولی معادله‌ی $x^۲=\frac{۳+\sqrt{۲۹}}{۲}$ دو ریشه‌ی حقیقی قرینه دارد.

B **۷۵- گزینه‌ی (۴)** قرار می‌دهیم $t=x^۲+۳x$، بنابراین معادله به‌صورت $t^۲+۸=۶t$ در می‌آید:

$$t^۲-۶t+۸= \Rightarrow (t-۲)(t-۴)= \Rightarrow \begin{cases} x^۲+۳x-۲= \Rightarrow \text{دو جواب} \\ x^۲+۳x-۴= \Rightarrow \text{دو جواب} \end{cases}$$

C **۷۶- گزینه‌ی (۲)** با جای‌گذاری $t=x^۲$ به معادله‌ی $t^۲-(m+۲)t+(m+۵)=$ می‌رسیم. برای آن که معادله‌ی اول، ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، باید اولاً این معادله‌ی جدید ۲ ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد $(\Delta>)$ و علاوه بر آن هر ۲ ریشه نیز مثبت باشند تا معادله‌ی $t=x^۲$ به دو پاسخ متمایز برسد. پس:

$$\Delta> \Rightarrow (m+۲)^۲-۴(m+۵)> \Rightarrow m^۲-۱۶> \Rightarrow m>۴ \ \text{یا}\ m<-۴$$

$$t_۱,t_۲> \Rightarrow S=t_۱+t_۲> \Rightarrow m+۲> \Rightarrow m>-۲\ ,\ t_۱,t_۲> \Rightarrow P=t_۱t_۲> \Rightarrow m+۵> \Rightarrow m>-۵$$

اشتراک سه شرط فوق $m>۴$ است.

C **۷۷- گزینه‌ی (۳)** با دسته‌بندی مناسب، می‌توانیم عبارت مشترک در حاصل‌ضرب پرانتزها ایجاد کنیم:

$$(x+۲)(x-۴)(x+۳)(x-۵)=۱۴۴ \Rightarrow (x^۲-۲x-۸)(x^۲-۲x-۱۵)=۱۴۴ \xrightarrow{t=x^۲-۲x} (t-۸)(t-۱۵)=۱۴۴$$

$$\Rightarrow t^۲-۲۳t-۲۴= \Rightarrow t_۱=۲۴\ ,\ t_۲=-۱$$

$$t_۱=۲۴ \Rightarrow x^۲-۲x=۲۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۲۴= \Rightarrow (x-۶)(x+۴)= \Rightarrow x_۱=۶\ ,\ x_۲=-۴$$

$$t_۲=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱= \Rightarrow (x-۱)^۲= \Rightarrow x_۳=۱$$

B **۷۸- گزینه‌ی (۲)** فرض می‌کنیم $x=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$، بنابراین:

$$x^۲=۵+۲\sqrt{۶} \Rightarrow (x^۲-۵)^۲=(۲\sqrt{۶})^۲ \Rightarrow (x^۲-۵)^۲=۲۴ \Rightarrow x^۴-۱۰x^۲+۲۵=۲۴ \Rightarrow x^۴-۱۰x^۲+۱=$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی بالا با معادله‌ی صورت سؤال به دست می‌آوریم $b=-۱۰$.

B **۷۹- گزینه‌ی (۴)** باید نقاط برخورد منحنی و خط $y=x$ را به دست آوریم. طول این نقاط ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند:

$$x=\frac{x^۴+۴}{۵x} \Rightarrow x^۴+۴=۵x^۲ \xrightarrow{t=x^۲} t^۲-۵t+۴= \Rightarrow t_۱=۴\ ,\ t_۲=۱$$

هر یک از دو معادله‌ی $x^۲=۱$ و $x^۲=۴$ دو ریشه دارند، پس روی هم ۴ ریشه و در نتیجه ۴ نقطه‌ی برخورد داریم.

C **۸۰- گزینه‌ی (۱)** قرار می‌دهیم $t=\frac{x}{x-۱}$، پس معادله به‌صورت $(a^۲-۱)t^۲-(۲a+۷)t+۱=$ در می‌آید که اگر دو ریشه‌ی آن $t_۱$ و $t_۲$ باشند، داریم: $t_۱+t_۲=\frac{۲a+۷}{a^۲-۱}$. از طرفی طبق فرض داریم $t_۱+t_۲=\frac{۳}{۱۱}$، بنابراین:

$$\frac{۲a+۷}{a^۲-۱}=\frac{۳}{۱۱} \Rightarrow ۳a^۲-۲۲a-۸۰= \Rightarrow (a-۱۰)(۳a+۸)= \Rightarrow a_۱=۱۰\ ,\ a_۲=-\frac{۸}{۳}$$

از طرفی برای وجود دو ریشه باید $\Delta>$، بنابراین:

$$(۲a+۷)^۲-۴(a^۲-۱)> \Rightarrow ۲۸a+۵۳> \Rightarrow a>-\frac{۵۳}{۲۸}$$

پس $a=-\frac{۸}{۳}$ غیر قابل قبول است و فقط $a=۱۰$ جواب تست است.

C **۸۱- گزینه‌ی (۲)**

چندجمله‌ای‌های معکوسه و معادلات معکوسه

- دو چندجمله‌ای $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ و $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ (با شرط $a_0,a_n\neq 0$) چندجمله‌ای‌های معکوس یکدیگر خوانده می‌شوند. در این چندجمله‌ای‌ها ضرایب بر عکس یکدیگرند.
- چندجمله‌ای $Q(x)$ را می‌توانیم به‌صورت $Q(x)=x^nP(\frac{1}{x})$ نشان بدهیم.
- ریشه‌های دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ وارون یکدیگرند.

ریشه‌های چندجمله‌ای $12x^3-20x^2+5x+1$ وارون ریشه‌های $x^3+5x^2-20x+12$ هستند. برای آن‌که به معادله‌ی فرض سؤال برسیم، کافی است چندجمله‌ای بالا را در $\frac{1}{6}$ ضرب کنیم:

$$12x^3-20x^2+5x+1=0\Rightarrow 2x^3-\frac{20}{6}x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0\Rightarrow a=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}$$

D **۸۲- گزینه‌ی (۴)** اگر معادله‌ای با معادله‌ی معکوس خود یکسان باشد (یعنی ضرایب آن متقارن باشند)، می‌توانیم آن را بر حسب $x+\frac{1}{x}$ مرتب کنیم. این جا با تقسیم دو طرف معادله بر x^2 داریم:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0\Rightarrow a((x+\frac{1}{x})^2-2)+b(x+\frac{1}{x})+c=0$$

اگر قرار دهیم $t=x+\frac{1}{x}$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم $a(t^2-2)+bt+c=0$ می‌رسیم.

D **۸۳- گزینه‌ی (۱)** اگر $Q(x)+1$ را تشکیل دهیم، همان چندجمله‌ای معکوس $P(x)$ است. پس:

$$Q(x)+1=x^4P(\frac{1}{x})\Rightarrow Q(x)=x^4P(\frac{1}{x})-1\Rightarrow Q(a_3)=a_3^4P(\frac{1}{a_3})-1$$

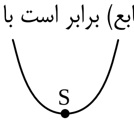
چون همواره $P(x)>0$، پس $a_3\neq 0$ (زیرا در غیر این صورت $P(0)=0$)، بنابراین $a_3^4P(\frac{1}{a_3})>0$، در نتیجه $Q(a_3)>-1$.

A **۸۴- گزینه‌ی (۱)**

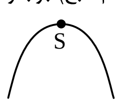
بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ بنا به علامت a بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار دارد:

۱- اگر $a>0$، مقدار تابع در رأس سهمی آن کم‌ترین مقدار آن است. در این صورت این کم‌ترین مقدار (یا همان می‌نیمم تابع) برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}$ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد.



۲- اگر $a<0$، مقدار تابع در رأس سهمی آن بیش‌ترین مقدار آن است. در این صورت این بیش‌ترین مقدار (یا همان ماکزیمم تابع) برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}$ و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد.



۳- کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار تابع f را با مربع کامل سازی نیز می‌توانید به دست آورید:

$$f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

حال از این که همواره $(x+\frac{b}{2a})^2\geq 0$، با توجه به علامت a می‌توانیم ماکزیمم یا می‌نیمم $f(x)$ را به دست آوریم.

راه اول: با مربع کامل سازی داریم: $f(x)=-(x^2-6x+9)+9-4=-(x-3)^2+5$

چون همواره $-(x-3)^2\leq 0$، پس $-(x-3)^2+5\leq 5$، در نتیجه $f(x)\leq 5$ و بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۵ می‌شود.

راه دوم: با توجه به آن‌که نمودار f، یک سهمی رو به پایین می‌شود تابع دارای بیش‌ترین مقدار است. این بیش‌ترین مقدار به ازای $x=-\frac{6}{2\times(-1)}=3$ رخ می‌دهد و برابر است با: $f(3)=-9+18-4=5$.

B **۸۵- گزینه‌ی (۱)** از فرض نتیجه می‌گیریم $y = a - ۲x$، بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با:

$$A = x(a - ۲x) = ax - ۲x^۲$$

A یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ بر حسب x است که بیش‌ترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{a}{۲ \times (-۲)} = \frac{a}{۴}$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$a(\frac{a}{۴}) - ۲(\frac{a}{۴})^۲ = \frac{a^۲}{۸}$$

A **۸۶- گزینه‌ی (۴)** **راه اول:** اگر دو عدد را x و y در نظر بگیریم، داریم $x + y = ۳۶$ و می‌خواهیم $A = xy$ ماکزیمم باشد. از فرض نتیجه می‌گیریم $y = ۳۶ - x$، بنابراین:

$$A = x(۳۶ - x) = -x^۲ + ۳۶x = -(x - ۶)^۲ + ۳۶ \xrightarrow{-(x-۶)^۲ \le} A \le ۳۶$$

پس بیش‌ترین مقدار A برابر ۳۶ است که به ازای $x = ۶$ و $y = ۶$ رخ می دهد. در این صورت اختلاف دو عدد صفر است.

راه دوم:

> **نکته:** اگر جمع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به دست می‌آید که دو عدد برابر باشند.
> این نکته با روشی شبیه راه اول این سؤال اثبات می‌شود!

بنابر این نکته وقتی xy ماکزیمم می‌شود که $x = y$، یعنی اختلاف آن‌ها صفر باشد.

A **۸۷- گزینه‌ی (۲)** اگر طول اضلاع قائم را x و y در نظر بگیریم داریم $x + y = ۸$ و می‌خواهیم بیش‌ترین مقدار $S = \frac{۱}{۲}xy$ را بیابیم. چون مجموع دو متغیر x و y مقدار ثابت ۸ است، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار را دارد که هر دو با هم برابر باشند، یعنی $x = y = ۴$، بنابراین:

$$S_{max} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ = ۸$$

B **۸۸- گزینه‌ی (۳)** ارتفاع استوانه را h و شعاع قاعده‌ی آن را r می‌گیریم. طبق فرض $۲r + h = ۳۰$ و می‌خواهیم $S = ۲\pi rh$ ماکزیمم شود.

راه اول: از فرض نتیجه می‌گیریم $h = ۳۰ - ۲r$، بنابراین:

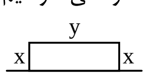
$$S = ۲\pi r(۳۰ - ۲r) = ۲\pi(-۲r^۲ + ۳۰r)$$

بیش‌ترین مقدار عبارت درجه‌ی دوم $-۲r^۲ + ۳۰r$ به ازای $r = -\frac{۳۰}{۲ \times (-۲)} = ۷/۵$ رخ می‌دهد. به ازای این مقدار داریم:

$$h = ۳۰ - ۲ \times (۷/۵) = ۱۵$$

راه دوم: S در صورتی بیش‌ترین مقدار را دارد که $۲rh$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. مجموع دو متغیر $a = ۲r$ و $b = h$ مقدار ثابت ۳۰ است، پس وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار را دارد که $a = b = ۱۵$.

B **۸۹- گزینه‌ی (۲)** فرض می‌کنیم طناب از دو ضلع با طول x و یک ضلع با طول y تشکیل شده باشد. پس $۲x + y = ۴۸$ و می‌خواهیم $S = xy$ ماکزیمم باشد.



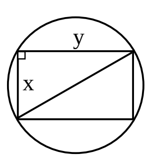
راه اول: از فرض داریم $y = ۴۸ - ۲x$، بنابراین:

$$S = x(۴۸ - ۲x) = -۲(x^۲ - ۲۴x) = -۲((x - ۱۲)^۲ - ۱۴۴) = -۲(x - ۱۲)^۲ + ۲۸۸$$

چون همواره $-۲(x - ۱۲)^۲ \le$، پس همواره $S \le ۲۸۸$، بنابراین بیش‌ترین مقدار S برابر ۲۸۸ متر مربع است.

راه دوم: واضح است که در صورتی S بیش‌ترین مقدار را دارد که $۲xy$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد. حاصل جمع دو متغیر $a = ۲x$ و $b = y$ مقدار ثابت ۴۸ است، پس وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم است که $a = b = ۲۴$، در این صورت $x = ۱۲$ و $y = ۲۴$، در نتیجه $S_{max} = ۱۲ \times ۲۴ = ۲۸۸$.

B **۹۰- گزینه‌ی (۱)** چون مستطیل داخل دایره قرار گرفته است، قطر مستطیل همان قطر دایره و برابر ۴ است. پس اگر طول اضلاع آن را x و y بگیریم، داریم $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ و می‌خواهیم $S = xy$ بیش‌ترین مقدار را داشته باشد.

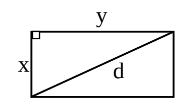


راه اول: واضح است که اگر S بیش‌ترین مقدار را داشته باشد، $S^۲ = x^۲y^۲$ نیز بیش‌ترین مقدار را دارد. حال داریم:

$$y^۲ = ۱۶ - x^۲ \Rightarrow S^۲ = x^۲(۱۶ - x^۲) = -x^۴ + ۱۶x^۲ = -(x^۲ - ۸)^۲ + ۶۴$$

از $-(x^۲ - ۸)^۲ \le$ نتیجه می‌گیریم $S^۲ \le ۶۴$، پس $S \le ۸$ و بیش‌ترین مقدار S برابر ۸ واحد مربع است.

راه دوم: مجموع دو متغیر $a = x^۲$ و $b = y^۲$ مقدار ثابت ۱۶ است و می‌خواهیم حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم باشد، پس $a = b = ۸$، بنابراین $S^۲ = ۸ \times ۸$، در نتیجه $S_{max} = ۸$.



B **۹۱- گزینه‌ی (۳)** طول اضلاع مستطیل را x و y می‌گیریم، پس $x+y=۱۲$. می‌خواهیم $d=\sqrt{x^۲+y^۲}$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. واضح است که باید $d^۲=x^۲+y^۲$ می‌نیمم باشد. از فرض داریم:

$$y=۱۲-x \Rightarrow d^۲=x^۲+(۱۲-x)^۲=۲x^۲-۲۴x+۱۴۴=۲(x-۶)^۲-۷۲+۱۴۴=۲(x-۶)^۲+۷۲$$

با توجه به $۲(x-۶)^۲ \geq$ ، نتیجه می‌گیریم $d^۲ \geq ۷۲$، پس $d \geq ۶\sqrt{۲}$، بنابراین کم‌ترین مقدار d برابر $۶\sqrt{۲}$ است.

C **۹۲- گزینه‌ی (۴)** چون $x , y >$ ، ماکزیمم شدن $A=x^۲y^۲$ معادل ماکزیمم شدن $B=xy$ است.

راه اول: از فرض داریم $y=۵-۴x$، بنابراین: $B=x(۵-۴x)=-۴x^۲+۵x$

بیش‌ترین مقدار عبارت درجه‌ی دوم بالا به ازای $x=\frac{۵}{۸}$ رخ می‌دهد و برابر است با $-۴(\frac{۵}{۸})^۲+۵(\frac{۵}{۸})=\frac{۲۵}{۱۶}$، پس بیش‌ترین مقدار A برابر است با: $(\frac{۲۵}{۱۶})^۲=(\frac{۵}{۴})^۴$.

راه دوم: مجموع دو متغیر $a=۴x$ و $b=y$ مقدار ثابت ۵ است، پس وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم است که $a=b=\frac{۵}{۲}$. واضح است که ماکزیمم بودن ab معادل ماکزیمم بودن B و A است. حال داریم:

$$۴x=y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow x=\frac{۵}{۸} , y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow A_{max}=(\frac{۵}{۸})^۲(\frac{۵}{۲})^۲=(\frac{۵}{۴})^۴$$

B **۹۳- گزینه‌ی (۳)** **راه اول:** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $y=\frac{۸}{x}$، بنابراین کم‌ترین مقدار عبارت $x+\frac{۸}{x}$ را می‌خواهیم. داریم:

$$x+\frac{۸}{x}=(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{۸}{x}})^۲+۲\sqrt{۸}$$

چون همواره $(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{۸}{x}})^۲ \geq$ ، پس همواره $x+\frac{۸}{x} \geq ۲\sqrt{۸}$ (که به ازای $\sqrt{x}=\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{x}}$ یا معادلاً $x=\sqrt{۸}$ دو طرف برابر می‌شوند). به این ترتیب کم‌ترین مقدار $x+y$ برابر $۲\sqrt{۸}=۴\sqrt{۲}$ است.

راه دوم:

> **نکته:** اگر حاصل‌ضرب دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل جمع آن‌ها وقتی کم‌ترین مقدار را دارد که آن دو با هم برابر باشند.
> روش اثبات این نکته شبیه راه اول این تست است!

طبق این نکته چون حاصل‌ضرب x و y مقدار ثابت ۸ است، وقتی حاصل جمع آن‌ها می‌نیمم است که $x=y=\sqrt{۸}$، به این ترتیب کم‌ترین مقدار $x+y$ برابر $۲\sqrt{۸}=۴\sqrt{۲}$ می‌شود.

C **۹۴- گزینه‌ی (۱)** **راه اول:** با تفکیک کسر، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$A(x)=\frac{۱}{۳}(x+\frac{۱۶}{x})\xrightarrow{\text{مربع کامل سازی}}\frac{۱}{۳}((\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}})^۲+۸)$$

با توجه به این‌که $(\sqrt{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}})^۲ \geq$ ، کم‌ترین مقدار عبارت بالا $\frac{۸}{۳}$ است.

راه دوم: اگر قرار دهیم $y=\frac{۱۶}{x}$، داریم $A=\frac{۱}{۳}(x+y)$. حاصل‌ضرب دو متغیر x و y مقدار ثابت ۱۶ است، پس وقتی جمع آن‌ها کم‌ترین مقدار را دارد که $x=y=۴$، در این صورت: $A_{min}=\frac{۱}{۳}(۴+۴)=\frac{۸}{۳}$

C **۹۵- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** ضابطه‌ی تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{۴(x+۱)^۲+۹}{۶(x+۱)}=\frac{۲}{۳}(x+۱)+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{x+۱}=(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\times\sqrt{x+۱}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{x+۱}})^۲+۲$$

با توجه به نتیجه‌ی آخر واضح است که همواره $f(x) \geq ۲$، پس کم‌ترین مقدار آن برابر ۲ است.

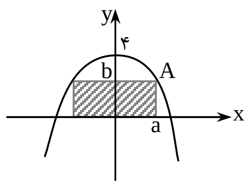
راه دوم: قرار می‌دهیم $a=\frac{۲}{۳}(x+۱)$ که با توجه به شرط $x>-۱$ داریم $a>$. پس $f(x)=a+\frac{۱}{a}$ و می‌دانیم $a+\frac{۱}{a} \geq ۲$، پس $f(x) \geq ۲$.

> **نکته:** اگر قرار دهیم $y=\frac{۱}{x}$ داریم $xy=۱$، پس کم‌ترین مقدار $x+y$ به ازای $x=y=۱$ رخ می‌دهد. به این ترتیب می‌توانیم بگوییم:
>
> ۱- برای هر $x>$ داریم: $x+\frac{۱}{x} \geq ۲$
>
> ۲- برای هر $x<$ داریم: $x+\frac{۱}{x} \leq -۲$

C **۹۶- گزینه‌ی (۳)** مخرج کسر همواره مثبت است و صورت آن عددی ثابت و مثبت است. بنابراین وقتی $f(x)$ بیش‌ترین مقدار را دارد که مخرج آن کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد، یعنی $۲x^۲ - ۴x + ۳$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد. داریم:

$$۲x^۲ - ۴x + ۳ = ۲(x-۱)^۲ - ۲ + ۳ = ۲(x-۱)^۲ + ۱ \xrightarrow{۲(x-۱)^۲ \ge} ۲x^۲ - ۴x + ۳ \ge ۱$$

پس کم‌ترین مقدار مخرج کسر ۱ و بنابراین بیش‌ترین مقدار کسر $\frac{۲}{۱} = ۲$ است.



C **۹۷- گزینه‌ی (۲)** نقطه‌ی $A(a,b)$ را روی سهمی در نظر می‌گیریم. طول مستطیل $۲a$ و عرض آن b است. همچنین از این که A روی سهمی است، نتیجه می‌گیریم $b = -a^۲ + ۴$. پس $b = -a^۲ + ۴$ و می‌خواهیم مقدار محیط مستطیل، یعنی $P = ۲(۲a + b)$ ماکزیمم شود. داریم:

$$P = ۲(۲a + (-a^۲ + ۴)) = ۲(-a^۲ + ۲a + ۴) = -۲(a-۱)^۲ + ۲ + ۸ = -۲(a-۱)^۲ + ۱۰$$

چون همواره $-۲(a-۱)^۲ \le$، پس همواره $P \le ۱۰$، بنابراین بیش‌ترین محیط ۱۰ واحد می‌شود.

B **۹۸- گزینه‌ی (۴)** نقطه‌ی $A(a,b)$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم، پس $b^۲ = -۲a + ۴$. فاصله‌ی A از مبدأ مختصات برابر است با $d = \sqrt{a^۲ + b^۲}$. پس می‌خواهیم $d^۲ = a^۲ + b^۲$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد:

$$d^۲ = a^۲ + (-۲a + ۴) = (a-۱)^۲ + ۳ \xrightarrow{(a-۱)^۲ \ge} d^۲ \ge ۳ \Rightarrow d \ge \sqrt{۳} \Rightarrow d_{min} = \sqrt{۳}$$

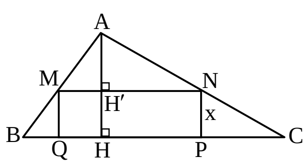
C **۹۹- گزینه‌ی (۲)** محیط ورق از ۱۲ پاره‌خط با طول x و ۲ پاره‌خط با طول y تشکیل شده است، پس $۶x + y = ۲۲۰$. حال می‌خواهیم $S = ۴xy + ۲x^۲$ (مجموع مساحت ۴ مستطیل و ۲ مربع) ماکزیمم شود. داریم:

$$y = ۲۲۰ - ۶x \Rightarrow S = ۴x(۲۲۰ - ۶x) + ۲x^۲ = -۲۲x^۲ + ۸۸۰x = -۲۲(x^۲ - ۴۰x) = -۲۲(x-۲۰)^۲ + ۴۰۰ \times ۲۲$$

چون همواره $-۲۲(x-۲۰)^۲ \le$، پس $S \le ۴۰۰ \times ۲۲$، بنابراین: $S_{max} = ۴۰۰ \times ۲۲ = ۸۸۰۰$

D **۱۰۰- گزینه‌ی (۳)** در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \xrightarrow[S=۳۰]{BC=۱۰} AH = ۶$$



پس اگر یک ضلع مستطیل را مطابق شکل $NP = x$ و دیگری را $MN = y$ در نظر بگیریم داریم $AH' = ۶ - x$. حال از تشابه دو مثلث AMN و ABC نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{y}{۱۰} = \frac{۶-x}{۶} \Rightarrow \frac{y}{۱۰} + \frac{x}{۶} = ۱$$

پس $\frac{x}{۶} + \frac{y}{۱۰} = ۱$ و می‌خواهیم $S = xy$ ماکزیمم شود. دو متغیر $a = \frac{x}{۶}$ و $b = \frac{y}{۱۰}$ حاصل جمع ثابت ۱ دارند، پس وقتی حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم است که $a = b = \frac{۱}{۲}$، در این صورت $x = ۳$ و $y = ۵$. واضح است که وقتی $ab = \frac{xy}{۶۰}$ ماکزیمم باشد، S ماکزیمم است، پس $S_{max} = ۳ \times ۵ = ۱۵$.

D **۱۰۱- گزینه‌ی (۳)** ابعاد عکس را x و y در نظر می‌گیریم، پس $xy = ۴۸$. ابعاد قاب نیز $x + ۲ \times ۱ = x + ۲$ و $y + ۲ \times ۱/۵ = y + ۳$ می‌شود. بنابراین می‌خواهیم $S = (x+۲)(y+۳)$ می‌نیمم شود. داریم:

$$S = xy + ۲y + ۳x + ۶ \xrightarrow{xy=۴۸} S = ۵۴ + ۲y + ۳x$$

باید $۲y + ۳x$ می‌نیمم شود. حال دو راه داریم:

راه اول: از فرض نتیجه می‌گیریم $y = \frac{۴۸}{x}$، پس داریم:

$$S = ۵۴ + \frac{۹۶}{x} + ۳x = ۵۴ + (\sqrt{۳x} - \frac{\sqrt{۹۶}}{\sqrt{x}})^۲ + ۲ \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۹۶}$$

با توجه به آن‌که همواره $(\sqrt{۳x} - \frac{\sqrt{۹۶}}{\sqrt{x}})^۲ \ge$، پس $S_{min} = ۵۴ + ۲ \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۹۶} = ۵۴ + ۲۴\sqrt{۲}$

راه دوم: حاصل‌ضرب دو متغیر $a = ۲y$ و $b = ۳x$ مقدار ثابت $۶xy = ۶ \times ۴۸$ است. پس وقتی $a + b = ۲x + ۳y$ می‌نیمم است که $a = b = \sqrt{۶ \times ۴۸} = ۱۲\sqrt{۲}$. در این صورت $S_{min} = ۵۴ + ۲ \times ۱۲\sqrt{۲}$.

D **۱۰۲- گزینه‌ی (۳)** در عبارت مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$A = x^۲ + ۲xy + y^۲ + ۲x + ۲y + ۱ + ۲y^۲ + ۴y + ۲ + ۱ = (x + y + ۱)^۲ + ۲(y + ۱)^۲ + ۱$$

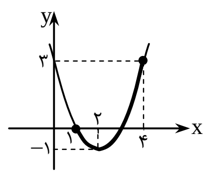
چون همواره $(x + y + ۱)^۲ \geq$ و $(y + ۱)^۲ \geq$، پس همواره $A \geq ۱$. همچنین به ازای $y = -۱$ و $x =$ داریم $A = ۱$، پس کم‌ترین مقدار A برابر ۱ است.

C **۱۰۳- گزینه‌ی (۱)** با توجه به مربع کامل سازی روی دو عبارت داخل پرانتز داریم:

$$۴x^۲ + ۴x + ۵ = (۲x + ۱)^۲ + ۴ \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x + ۵ \geq ۴ \quad , \quad y^۲ - ۶y + ۱۵ = (y - ۳)^۲ + ۶ \Rightarrow y^۲ - ۶y + ۱۵ \geq ۶$$

پس همواره حاصل‌ضرب دو پرانتز بزرگ‌تر از یا مساوی با $۲۴ = ۶ \times ۴$ است و تنها وقتی با ۲۴ برابر می‌شود که دو عبارت در کم‌ترین مقدار خود باشند، یعنی $۲x + ۱ =$ و $y - ۳ =$، بنابراین فقط $x = -\frac{۱}{۲}$ و $y = ۳$ در رابطه‌ی بالا صدق می‌کنند.

C **۱۰۴- گزینه‌ی (۲)** نمودار $y = x^۲ - ۴x + ۳$ را رسم می‌کنیم. در فاصله‌ی $۱ \leq x \leq ۴$ روی قسمت پر رنگ نمودار هستیم. واضح است که کم‌ترین مقدار به ازای $x = ۲$ رخ می‌دهد و برابر $b = -۱$ است. بیش‌ترین مقدار به ازای $x = ۴$ رخ می‌دهد و برابر $a = ۳$ است. پس $a - b = ۴$.



B **۱۰۵- گزینه‌ی (۱)** فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲ - ۷x + ۳ =$ باشند، پس ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ax + b =$، برابر $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ هستند. داریم:

$$x = \frac{۲}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{x} \Rightarrow ۴ \times (\frac{۲}{x})^۲ - ۷ \times \frac{۲}{x} + ۳ = \Rightarrow \frac{۱۶}{x^۲} - \frac{۱۴}{x} + ۳ = \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۶ = \Rightarrow a = -۱۴ , b = ۱۶$$

B **۱۰۶- گزینه‌ی (۲)** فرض می‌کنیم ریشه‌ها $x_۱$ و $x_۲$ باشند و $x_۲ = ۳x_۱ + ۳$. از روابط بین ریشه‌ها داریم:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۱۷}{۳} \xrightarrow{x_۲ = ۳x_۱ + ۳} ۴x_۱ + ۳ = \frac{۱۷}{۳} \Rightarrow x_۱ = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{x_۲ = ۳x_۱ + ۳} x_۲ = ۵ \xrightarrow{x_۱x_۲ = \frac{m}{۳}} \frac{m}{۳} = \frac{۲}{۳} \times ۵ \Rightarrow m = ۱۰$$

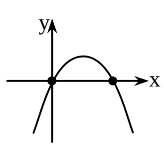
B **۱۰۷- گزینه‌ی (۳)** باید معادله‌ی $۲x^۲ - ۴x + m - ۳ =$ دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد. پس اولاً باید $\Delta >$، ثانیاً مجموع و حاصل‌ضرب دو ریشه (یعنی مقادیر ۲ و $\frac{m - ۳}{۲}$) مثبت باشند. از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $m > ۳$، از شرط اول نیز داریم:

$$\Delta > \Rightarrow ۴(۴ - ۲(m - ۳)) > \Rightarrow ۲(m - ۳) < ۴ \Rightarrow m - ۳ < ۲ \Rightarrow m < ۵ \xrightarrow{m > ۳} ۳ < m < ۵$$

B **۱۰۸- گزینه‌ی (۴)** باید معادله‌ی زیر ریشه نداشته باشد:

$$mx = (۲x + ۱)(x + ۸) \Rightarrow ۲x^۲ + (۱۷ - m)x + ۸ = \xrightarrow{\Delta <} (۱۷ - m)^۲ - ۸^۲ < \Rightarrow (۹ - m)(۲۵ - m) < \Rightarrow ۹ < m < ۲۵$$

C **۱۰۹- گزینه‌ی (۲)** به ازای $a =$ منحنی به $y = -۲x$ تبدیل می‌شود که خطی است که از ناحیه‌ی دوم می‌گذرد. برای $a \neq$، با یک سهمی مواجه‌ایم که قطعاً از مبدأ می‌گذرد، پس باید شکلی شبیه شکل روبه‌رو داشته باشد. در این صورت اولاً $a <$، ثانیاً باید ریشه‌ی دیگر معادله $ax^۲ - (a + ۲)x =$ (یعنی $x = \frac{a + ۲}{a}$) عددی مثبت باشد:



$$\frac{a + ۲}{a} > \xrightarrow{a <} a + ۲ < \Rightarrow a < -۲ \xrightarrow{a <} a < -۲$$

چنان‌چه می‌بینید تست نادرست است!

B **۱۱۰- گزینه‌ی (۴)** با جای‌گذاری $t = x^۲$ به معادله‌ی $t^۲ - ۳t + ۱ =$ می‌رسیم که اگر ریشه‌های آن را $t_۱$ و $t_۲$ بنامیم داریم $t_۱t_۲ = ۱$ و $t_۱ + t_۲ = ۳$، پس هر دو مقدار $t_۱$ و $t_۲$ مثبت‌اند. هر یک از این دو مقدار به دو ریشه برای x ختم می‌شوند (ریشه‌های $\pm\sqrt{t_۱}$ و $\pm\sqrt{t_۲}$). مجموع مجذورهای این ۴ ریشه برابر است با $۲t_۱ + ۲t_۲ = ۲ \times ۳ = ۶$.

B **۱۱۱- گزینه‌ی (۱)** α ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند: $\alpha^۲ - ۲\alpha - ۴ = \Rightarrow \alpha^۲ - ۴ = ۲\alpha$

با جای‌گذاری این نتیجه، عبارت مورد نظر برابر $(۲\alpha)^۲ + ۴\beta^۲$ می‌شود که برابر است با:

$$۴(\alpha^۲ + \beta^۲) = ۴((\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta) = ۴(۲^۲ - ۲(-۴)) = ۴۸$$

A **۱۱۲- گزینه‌ی (۴)** قرار می‌دهیم $A = \sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲}$، بنابراین:

$$A^۲ = x_۱ + x_۲ + ۲\sqrt{x_۱x_۲} \xrightarrow[x_۱x_۲ = ۱]{x_۱ + x_۲ = ۴} A^۲ = ۴ + ۲ \Rightarrow A^۲ = ۶ \xrightarrow{A >} A = \sqrt{۶}$$