فصل دوم حرکت‌شناسی

اگر به جهان اطراف خود نگاه کنید حرکت‌های بسیاری را مشاهده خواهید کرد، از فرو افتادن برگ درختان گرفته تا پرواز پرندگان، حرکت ماه و خورشید در آسمان، رفت و آمد خودروها در خیابان و ... همه‌ی این‌ها نشان می‌دهد که حرکت از ویژگی‌های مهم و اساسی جهانی است که ما در آن به‌سر می‌بریم. البته برخی از حرکت‌ها در طبیعت ساده‌ترند، مثل سقوط یک گلوله یا حرکت مستقیم یک قطار و بعضی نیز پیچیده‌ترند، مثل حرکت افتادن برگ از درخت یا حرکت بدن یک ورزشکار. اما همان‌طور که در همه‌ی شاخه‌های علوم متداول است، ما نیز ابتدا حرکت‌های بسیار ساده را در نظر می‌گیریم و معمولاً فرض ما این است که جسم مورد نظر به اندازه‌ی کافی کوچک بوده، به‌طوری که حرکت همه‌ی نقاط آن مشابه هم باشد.

شاخه‌ای از فیزیک که موضوع آن حرکت است، مکانیک نامیده می‌شود. این واژه از لغت یونانی $Mechane$ به معنی ماشین گرفته شده است. معمولاً مکانیک به دو بخش کلی تقسیم می‌شود:

۱) حرکت‌شناسی (سینماتیک) ۲) نیروشناسی (دینامیک)

در حرکت‌شناسی (سینماتیک)، بین کمیت‌های مربوط به یک حرکت خاص، رابطه‌ای ریاضی برقرار می‌کنیم اما با علت‌های مؤثر بر آن کاری نداریم. در نیرو شناسی (دینامیک) به این علت‌ها توجه کرده و آن‌ها را در معادله‌های ریاضی خود وارد می‌کنیم که در فصل بعدی به‌طور مقدماتی به آن خواهیم پرداخت.

حرکت نسبت به چه !!؟

سر کلاس درس از دانش‌آموزان پرسیدم «یک جسم ساکن مثال بزنید.»، در پاسخ، بعضی از شاگردان تخته سیاه و یا میز جلویشان را مثال زدند. پرسیدم «حالا بگویید که فاصله‌ی شما از سطح زمین چقدر است؟» تقریباً همه پاسخ دادند «صفر». پرسیدم در پاسخ پرسش اول من به این توجه کرده‌اید که این میز و تخته سیاه به همراه کره‌ی زمین به دور خورشید می‌چرخند؟ آیا اصولاً می‌توانید جسم ساکنی را در جهان پیرامون خود مشخص کنید؟ چرا تخته سیاه یا میز را ساکن در نظر گرفتید؟ یکی از دانش‌آموزان گفت: «چون اون‌ها رو نسبت به خودمون سنجیدیم.» گفتم پس برای بررسی سکون و حرکت اجسام به یک مبدأ مقایسه نیاز داریم که معمولاً خود را مبدأ می‌گیریم.

سپس گفتم این مدرسه دو طبقه است و ما در طبقه‌ی دوم آن قرار داریم و وقتی من سؤال کردم که فاصله‌ی شما از زمین چقدر است پاسخ دادید «صفر». در واقع شما مجدداً برای آن‌که مکان خود را اعلام کنید، محل قرار گرفتن خود را مبدأ در نظر گرفتید و چنان‌چه کف طبقه‌ی اول را مبدأ می‌گرفتید، پاسخ شما تغییر می‌کرد یعنی برای بیان مکان یک جسم، آن را نسبت به یک مبدأ می‌سنجیم.

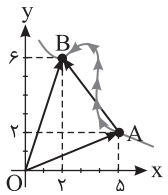
نتیجه این‌که در بررسی سکون و حرکت هر جسم و مکان جسم به یک مبدأ مقایسه نیاز داریم.

بردار مکان و بردار جابه‌جایی

برای مشخص کردن مکان یک جسم به سه چیز نیاز است:

۱) مبدأ مقایسه ۲) جهت ۳) اندازه

بنابراین مکان یک کمیت برداری است.



برای مشخص کردن مکان یک جسم در یک صفحه، می‌توان از درس ریاضی کمک گرفت و در یک دستگاه مختصات (xoy) مکان جسم را با یک نقطه با مختصات (x,y) نمایش داد. به‌طور مثال اگر ذره‌ای از نقطه‌ی A به مختصات $(۵,۲)$ روی مسیر نشان داده شده در شکل به نقطه‌ی B به مختصات $(۲,۶)$ برود، با رسم برداری از مبدأ O به نقطه‌ی A و همچنین به نقطه‌ی B، دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مشخص می‌شوند که آن‌ها را **بردارهای مکان** جسم می‌نامیم. اگر نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل کنیم، بردار $\overrightarrow{AB}$ به‌دست می‌آید که به آن **بردار جابه‌جایی** می‌گوییم.

با توجه به شکل و قاعده‌ی جمع بُردارها به روش مثلث که در فصل قبل گفته شد، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

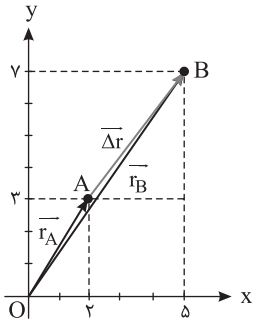
می‌توانیم از علامت‌های ساده‌تری هم استفاده کنیم. مثلاً به‌جای $\overrightarrow{OA}$، $\vec{r}_۱$ و به‌جای $\overrightarrow{OB}$ نیز $\vec{r}_۲$ بنویسیم. بنابراین $\overrightarrow{AB}$ برابر $\Delta\vec{r}=\vec{r}_۲-\vec{r}_۱$ می‌شود.

تعریف: **به بردار $\overrightarrow{AB}$ یا $\Delta\vec{r}$ که مکان اولیه را به مکان ثانویه متصل می‌کند، بردار جابه‌جایی می‌گوییم.**

مسأله‌ی (۱): ذره‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ در نقطه‌ی به مختصات $(۲,۳)$ و در لحظه‌ی $t_۲$ در نقطه‌ی B به مختصات $(۵,۷)$ قرار دارد. (یکاها در SI هستند.)

الف) بردار مکان ذره در نقطه‌های A و B را در دستگاه مختصات نمایش دهید.

ب) بردار جابه‌جایی را رسم کرده، اندازه‌ی مؤلفه‌های آن را به‌دست آورید، سپس طول بردار جابه‌جایی را حساب کنید.



راه‌حل: الف) دستگاه مختصات را رسم کرده، نقطه‌های A و B را مشخص کرده و با رسم بردارهایی از O به A و B بردارهای مکان را مشخص می‌کنیم.

ب) با رسم برداری از A تا B، بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ به‌دست می‌آید. در ریاضی خوانده‌ایم که برای یافتن مؤلفه‌های یک بردار، مختصات دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی آن را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta r_x = B_x - A_x = ۵ - ۲ = ۳$$

$$\Delta r_y = B_y - A_y = ۷ - ۳ = ۴$$

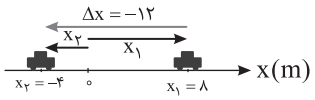
اندازه‌ی بردار Δr را به کمک قضیه‌ی فیثاغورث به‌دست می‌آوریم:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

مسأله‌ی (۲): خودرویی روی محور xها حرکت می‌کند. این خودرو در مبدأ زمان در مکان $x_۱ = +۸m$ و در لحظه‌ی $t_۲$ در مکان $x_۲ = -۴m$ قرار دارد. بردار جابه‌جایی آن را روی شکل نشان دهید.

راه‌حل: در این‌جا، به‌جای $\Delta\vec{r}$ می‌توانیم بنویسیم $\Delta\vec{x}$، حتی استفاده از علامت بردار نیز ضروری نیست.

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = -۴ - ۸ = -۱۲\,m$$



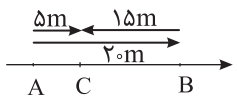
علامت منفی به این معنی است که جابه‌جایی جسم در خلاف جهت محور xها بوده است، یعنی خودرو به اندازه‌ی ۱۲ متر در جهت منفی جابه‌جا شده است. در این شکل، بردارهای $x_۱$ و $x_۲$ مکان جسم در دو حالت هستند. همان‌طور که در تعریف بردار جابه‌جایی گفتیم، کافی است که مکان اولیه‌ی x را به مکان ثانویه‌ی آن وصل کنیم تا Δx (جابه‌جایی) به‌دست آید.

مسأله‌ی (۳): دانش‌آموزی روی محور xها ابتدا به اندازه‌ی ۲۰ متر در جهت مثبت می‌رود و سپس به اندازه‌ی ۱۵ متر در همان راستا برمی‌گردد.

الف) جابه‌جایی او را به‌دست آورید.

ب) طول مسیری که پیموده است (مسافت) چند متر است؟

راه‌حل: الف) فرض می‌کنیم که از نقطه‌ی A شروع به حرکت کرده است:



با توجه به تعریف بردار جابه‌جایی، کافی است که محل ابتدایی را به محل نهایی وصل کنیم، یعنی اگر از A برداری به C رسم کنیم، بردار جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

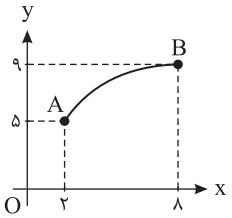
$$\Delta x = x_C - x_A = ۵m$$

ب) اما مسافت پیموده شده برابر با $۲۰ + ۱۵ = ۳۵m$ خواهد بود.

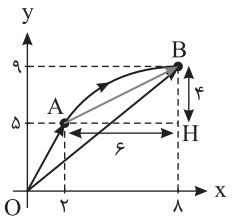
مسأله‌ی (۴): مطابق شکل، یک متحرک در مسیر منحنی از نقطه‌ی A به B می‌رسد؛

الف) بردارهای مکان و جابه‌جایی را رسم کنید.

ب) بزرگی بردار جابه‌جایی را به‌دست آورید.



راه‌حل: الف) به بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به ترتیب، بردارهای مکان A و B می‌گوییم و بردار $\overrightarrow{AB}$ جابه‌جایی را نشان می‌دهد:



ب) برای محاسبه‌ی طول بردار جابه‌جایی $\overrightarrow{AB}$ از قضیه‌ی فیثاغورث استفاده می‌کنیم. مطابق شکل AB وتر مثلث ABH است:

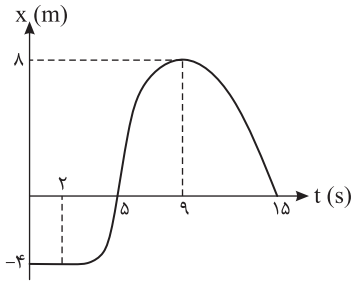
$$AB = \sqrt{۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳}m$$

حرکت روی خط راست

در مسـأله‌های ارائه شـده در قسمت قبل، کاملاً مشخص شد که بررسـی حرکت متحرکی که روی خط راست جابه‌جا می‌شود بسیار ساده‌تر از حرکت متحرکی است که روی مسیر خمیده حرکت می‌کند، زیرا در حرکت روی خط راست، بردارهای مکان و جابه‌جایی هم‌راستا بوده، بررسی حرکت ساده‌تر است ولی در مسیر خمیده باید ریاضیات بردار به‌کار گرفته شود. از این رو، در بررسی حرکت از حرکت روی خط راست شروع می‌کنیم.

نمودار مکان- زمان

فرض کنید متحرکی روی محور xها در حرکت باشد به‌طوری که در هر لحظه از حرکت، مکان آن‌را نسبت به مبدأ مختصات بدانیم. می‌توانیم مکان را روی محور قائم و زمان را روی محور افقی نمایش دهیم. بنابراین هر موقعیتی از جسـم روی دسـتگاه مختصات با یک نقطه مشـخص می‌شود که با اتصال این نقاط به یک‌دیگر، نمودار مکان- زمان به‌دسـت می‌آید. در بسـیاری از موارد این نمودار برای بررسـی حرکت بسیار مناسب است و به درک مسأله کمک می‌کند.



مسأله‌ی (۵): نمودار مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، داده شده است.

الف) در هر یک از بازه‌های زمانی صفر تا ۲، ۲ تا ۵، ۲ تا ۹ و ۹ تا ۱۵ ثانیه جابه‌جایی چقدر است؟

ب) در چه لحظه‌ای متحرک از مبدأ مکان گذشته و در چه لحظه‌ای جهت حرکت عوض شده است؟

پ) کل مسافت پیموده شده چند متر است؟

راه‌حل: الف) در بازه‌ی زمانی $t=۰$ تا $t=۲s$، جسم جابه‌جایی ندارد و با توجه به نمودار می‌بینیم که مکان آن همواره ۴- متر بوده است.

در بازه‌ی ۰ تا ۲ ثانیه: $\Delta x=x_۲-x_۰=-۴-(-۴)=۰$

در بازه‌ی ۲ تا ۵ ثانیه: $\Delta x=x_۵-x_۲=۰-(-۴)=۴m$

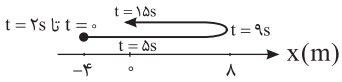
در بازه‌ی ۲ تا ۹ ثانیه: $\Delta x=x_۹-x_۲=۸-(-۴)=۱۲m$

در بازه‌ی ۹ تا ۱۵ ثانیه: $\Delta x=x_{۱۵}-x_۹=۰-۸=-۸m$

علامت منفی یعنی این‌که جسم به اندازه‌ی ۸ متر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

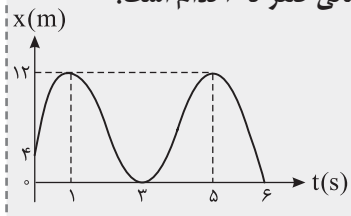
ب) این متحرک در لحظات $t=۵s$ و $t=۱۵s$ از مبدأ مکان می‌گذرد و همان‌طور که دیده می‌شـود در لحظه‌ی $t=۹s$ به بیش‌ترین فاصله از مبدأ می‌رسد و سپس به سمت مبدأ برمی‌گردد یعنی در $t=۹s$ تغییر جهت می‌دهد.

پ) می‌توانیم چگونگی حرکت واقعی جسم را به طرز ساده‌ای نمایش دهیم. یعنی از ۴- متر به راه می‌افتد، از مبدأ گذشته و تا $x=۸m$ حرکت می‌کند. در این لحظه ($t=۹s$) متحرک برمی‌گردد و در $t=۱۵s$ دوباره به مبدأ مختصات می‌رسد.



بنابراین کل مسافت پیموده شده برابر است با: $۴+۸+۸=۲۰m$

تست ۱: با توجه به نمودار مکان- زمان داده شده نسبت جابه‌جایی به مسافت طی شده در بازه‌ی زمانی صفر تا ۶ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۱۱}$

۳) $-\frac{۱}{۱۱}$

۴) $-\frac{۱}{۶}$

پاسخ: برای محاسبه‌ی جابه‌جایی کافی است که مکان نهایی در $t=۶s$ را از مکان در $t=۰$ کم کنیم:

$\Delta x=x_۶-x_۰=۰-۴=-۴m$

برای محاسبه‌ی مسافت می‌توان گفت که متحرک از صفر تا $۱s$، از ۴ متری تا ۱۲ متری مبدأ رفته است، پس به اندازه‌ی $۱۲-۴=۸$ متر مسافت پیموده اسـت. از $۱s$ تا $۳s$ به اندازه‌ی ۱۲ متر برمی‌گردد و از $۳s$ تا $۵s$ به اندازه‌ی ۱۲ متر از مبدأ دور می‌شـود و در بازه‌ی $۵s$ تا $۶s$ باز هم ۱۲ متر برمی‌گردد. بنابراین کل مسافت طی شده برابر است با:

$۸+۱۲+۱۲+۱۲=۴۴m$

پس نسبت جابه‌جایی به مسافت برابر می‌شود با:

$\frac{-۴}{۴۴}=-\frac{۱}{۱۱}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

سرعت متوسط

تعریف: **نسبت جابه‌جایی یک جسم به فاصله‌ی زمانی‌ای که در طی آن، جابه‌جایی انجام شده است را سرعت متوسط می‌نامیم:** $\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

یکای سرعت متوسط و به‌طور کلی سرعت در SI، متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است.

تذکر: سرعت متوسط یک کمیت برداری است و طبق آن‌چه که تعریف شد با بردار جابه‌جایی هم‌سو (هم‌جهت) است، زیرا Δt یک کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است.

پرسش: **آیا سرعت متوسطی که تعریف کردیم همواره با آن‌چه در زندگی روزمره به عنوان سرعت متوسط می‌شناسیم یکسان است؟**

پاسخ: خیر. در زندگی عادی ما همواره طول مسیر حرکت (مسافت) را به مدت حرکت تقسیم می‌کنیم و سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم، در حالی‌که در مکانیک، طول یا شکل مسیر اهمیتی ندارد، بلکه باید فاصله‌ی مستقیم مبدأ تا مقصد را بر مدت حرکت تقسیم کنیم تا سرعت متوسط به‌دست بیاید. فقط در حالتی‌که حرکت بر مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت باشد این دو تعریف در زندگی عادی و فیزیک با هم سازگاری دارند. به مسأله‌ی زیر دقت کنید:

مسأله‌ی (۶): **شناگری طول یک استخر ۵۰ متری را در یک دقیقه طی می‌کند و همین فاصله را در ۱/۵ دقیقه برمی‌گردد. سرعت متوسط او در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

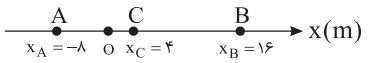
راه‌حل: صفر. زیرا جابه‌جایی کل صفر است. یعنی اگر مبدأ حرکت را به مقصد وصل کنیم، برداری با طول صفر به‌دست می‌آید. بنابراین طبق رابطه‌ی $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ یا $\bar{v}=\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$، سرعت متوسط صفر می‌شود.

اما اگر بخواهیم سرعت متوسط این شناگر را در یک مسابقه‌ی شنا در کل مسیر حرکت بیان کنیم، می‌نویسیم:

$$\bar{v}=\frac{۲\times۵۰}{۲/۵\times۶۰}=\frac{۲}{۳}\frac{m}{s}$$

این مثال تفاوت سرعت متوسط در فیزیک و امور روزمره را نشان می‌دهد.

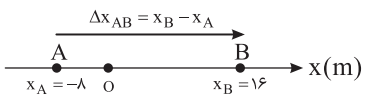
مسأله‌ی (۷): **متحرکی مطابق شکل روی محور xها در حرکت است. این متحرک در $t_۱=۲s$ در A قرار دارد، در $t_۲=۵s$ به نقطه‌ی B می‌رسد و سپس برگشته و در $t_۳=۱۰s$ از نقطه‌ی C می‌گذرد.**



الف) سرعت متوسط آن‌را در فاصله‌ی $t_۱$ تا $t_۲$ به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن‌را در فاصله‌ی $t_۱$ تا $t_۳$ به‌دست آورید.

راه‌حل: الف) چون حرکت روی محور xها است، به‌جای Δr می‌توانیم از Δx استفاده کنیم:

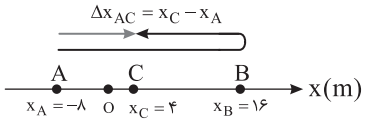


$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_۲-\vec{r}_۱\Rightarrow\Delta x=x_۲-x_۱$$

$$\Delta x_{AB}=x_B-x_A=۱۶-(-۸)=۲۴m$$

$$\bar{v}_{AB}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۴}{۵-۲}=۸\frac{m}{s}$$

ب)

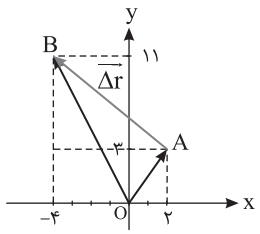


$$\Delta x_{AC}=x_C-x_A=۴-(-۸)=۱۲m$$

$$\bar{v}_{AC}=\frac{۱۲}{۱۰-۲}=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی (۸): **جسمی در صفحه‌ی xoy از مکان $A(۲,۳)$ در مدت ۵ ثانیه به مکان $B(-۴,۱۱)$ می‌رسد. سرعت متوسط آن‌را به‌دست آورید.**

راه‌حل: نقاط A و B را در صفحه‌ی مختصات نشان می‌دهیم سپس فاصله‌ی AB را با استفاده از فرمول فاصله‌ی بین دو نقطه در درس ریاضی به‌دست می‌آوریم:



$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=۱۰m$$

$$\bar{\vec{v}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\frac{m}{s}$$

تذکر: دقت کنید که با توجه به داده‌های مسأله، مسیر حرکت مشخص نیست، یعنی جسم الزاماً روی بردار $\Delta\vec{r}$ حرکت نکرده است.

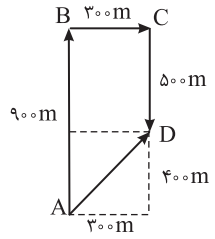
مسأله‌ی (۹): دانش‌آموزی برای رسیدن به مدرسه، ابتدا ۹۰۰ متر رو به شمال می‌رود سپس ۳۰۰ متر به طرف شرق رفته و پس از آن ۵۰۰ متر به طرف جنوب حرکت می‌کند، چنان‌چه کل مدت حرکت او ۲۵ دقیقه باشد:

الف) مسافت پیموده شده را به‌دست آورید. **ب) سرعت متوسط او را در SI به‌دست آورید.**

راه‌حل: الف) اگر از A شروع به حرکت کرده باشد باید طول همه‌ی مسیرهای پیموده شده را با هم جمع کنیم تا مسافت طی شده به‌دست آید:

$$\text{مسافت} = AB+BC+CD = ۱۷۰۰m$$

ب) برای محاسبه‌ی سرعت متوسط لازم است که بردار جابه‌جایی کل را به‌دست آوریم. همان‌طور که در سؤال قبل گفته شد، برای محاسبه‌ی سرعت متوسط در فیزیک از مسافت طی شده استفاده نمی‌کنیم، بلکه باید بردار جابه‌جایی $(\overrightarrow{AD})$ را به‌دست آوریم و برای این کار کافی است که مبدأ حرکت را به‌طور مستقیم به مقصد وصل کنیم:



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

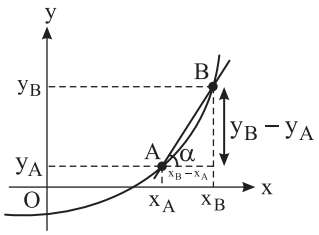
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{۳۰۰^۲+۴۰۰^۲} = ۵۰۰m$$

$$|\overline{v}| = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\Delta t} = \frac{۵۰۰m}{۱۵۰۰s} = \frac{۱}{۳}\frac{m}{s}$$

تذکر: توجه می‌کنیم که اگر سرعت متوسط در زندگی روزمره مد نظر بود آن را به‌صورت $\overline{v} = \frac{۱۷۰۰m}{۱۵۰۰s} = \frac{۱۷}{۱۵}\frac{m}{s}$ به‌دست می‌آوردیم، که البته در فیزیک این‌گونه نیست.

یادآوری ریاضی شیب خط

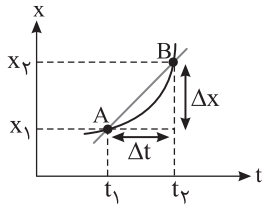
در درس ریاضی یاد گرفته‌ایم که برای یک کمیت نموداری رسم کنیم که چگونگی تغییرات آن کمیت (y) را برحسب تغییرات کمیت متغیر دیگری (x) نشان دهد. در شکل روبه‌رو یک نمودار در صفحه‌ی xoy رسم شده است. نقطه‌ی A و B روی این نمودار می‌باشند. خطی که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل می‌کند را خط قاطع منحنی می‌گوییم. تانژانت زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور طول‌ها (x ها) می‌سازد را شیب خط می‌گوییم.



$$m = \tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تعیین سرعت متوسط به کمک نمودار مکان- زمان

فرض کنید که نمودار مکان- زمان متحرکی به‌صورت روبه‌رو باشد و متحرک در لحظه‌ی $t_۱$ در مکان $x_۱$ و در لحظه‌ی $t_۲$ در مکان $x_۲$ است. مطابق آن‌چه در یادآوری ریاضی بیان شد، شیب خطی که دو نقطه‌ی A و B را به هم وصل می‌کند به‌صورت روبه‌رو است:

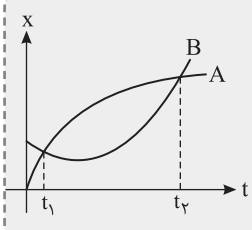


$$m = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

شیب خط را با تعریف سرعت متوسط $(\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ مقایسه کنید، نتیجه‌ای که حاصل می‌شود این است:

نتیجه: **شیب خطی که دو نقطه از نمودار مکان- زمان را به هم وصل می‌کند برابر با سرعت متوسط بین دو نقطه است.**

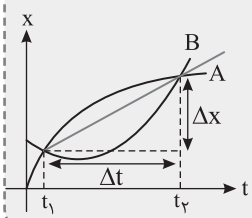
تست ۲: شکل روبه‌رو نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B را که بر محور xها حرکت می‌کنند، نشان می‌دهد. کدام گزینه درباره‌ی سرعت متوسط آن‌ها در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ درست است؟



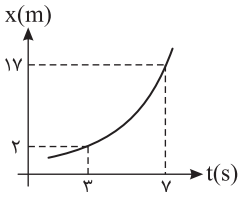
۱) $\overline{v}_A > \overline{v}_B$ ۲) $\overline{v}_A < \overline{v}_B$

۳) $\overline{v}_A = \overline{v}_B$ ۴) $\overline{v}_A \leq \overline{v}_B$

پاسخ: اگر بردار جابه‌جایی در بازه‌ی $t_۲ - t_۱$ را برای دو نمودار رسم کنیم، دو خط مستقیم خواهیم داشت که کاملاً بر هم منطبق‌اند و شیب این دو خط با هم برابر بوده و سرعت متوسط دو متحرک یکی است. از طرفی می‌توان این‌گونه استدلال کرد که در بازه‌ی زمانی یکسان $t_۲ - t_۱$، هر دو متحرک جابه‌جایی یکسان $x_۲ - x_۱$ را طی کرده‌اند. بنابراین $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای هر دو یکسان است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.



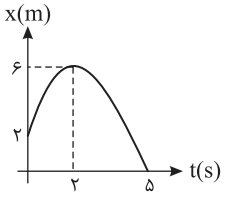
مسأله‌ی (۱۰): در شکل روبه‌رو نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است، رسم شده است. سرعت متوسط آن‌را در بازه‌ی زمانی $t_1=3s$ تا $t_2=7s$ بیابید.



راه‌حل: کافی است به کمک رابطه‌ی $\overline{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$، سرعت متوسط را به‌دست آوریم:

$$\overline{v}=\frac{17-2}{7-3}\Rightarrow\overline{v}=\frac{15}{4}\Rightarrow\overline{v}=3/75\frac{m}{s}$$

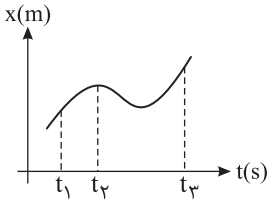
مسأله‌ی (۱۱): در شکل روبه‌رو، سرعت متوسط در بازه‌ی صفر تا $5s$ را بیابید.



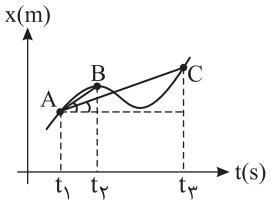
راه‌حل: با توجه به تعریف سرعت متوسط $(\overline{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1})$ داریم:

$$\overline{v}=\frac{0-2}{5-2}=-\frac{2}{3}\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی (۱۲): در شکل روبه‌رو، نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است رسم شده است. سرعت متوسط را در دو بازه‌ی t_1 تا t_2 و t_1 تا t_3 مقایسه کرده، مشخص کنید اندازه‌ی کدام‌یک بیش‌تر است؟



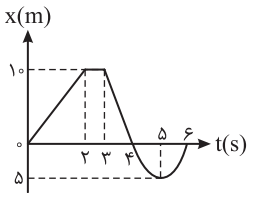
راه‌حل: شیب خط قاطع بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط است. از این رو با توجه به شکل، شیب خط AB از شیب خط AC بیش‌تر بوده پس سرعت متوسط در بازه‌ی t_1 تا t_2 از t_1 تا t_3 بیش‌تر است.



مسأله‌ی (۱۳): نمودار تغییرات مکان متحرکی که بر محور xها حرکت می‌کند، برحسب زمان داده شده است.

الف) سرعت متوسط آن‌را در بازه‌های زمانی ۰ تا ۲، ۲ تا ۴ و ۴ تا ۶ ثانیه به‌دست آورید.

ب) متحرک در مدت $6s$ چه مسافتی پیموده است؟ و سرعت متوسط آن در بازه‌ی ۰ تا $6s$ چند متر بر ثانیه است؟

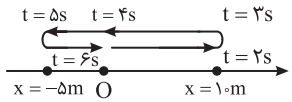


راه‌حل: الف)

سرعت متوسط از ۰ تا ۲ ثانیه: $\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{10-0}{2-0}=5\frac{m}{s}$ ، سرعت متوسط از ۲ تا ۴ ثانیه: $\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-10}{4-2}=-5\frac{m}{s}$

سرعت متوسط از ۴ تا ۶ ثانیه: $\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-0}{6-4}=0$

ب) این متحرک در دو ثانیه‌ی اول از $x=0$ تا ۱۰ متری مبدأ را در جهت مثبت می‌رود. از ۲ تا ۳ ثانیه متوقف است. از $t=3s$ تا $t=4s$ به طرف مبدأ برمی‌گردد (سرعت آن منفی است). از $t=4s$ تا $x=5s$ از مبدأ تا $x=-5$ متری می‌رود و در بازه‌ی زمانی $t=5s$ تا $t=6s$ دوباره به مبدأ برمی‌گردد. شکل واقعی حرکت را می‌توانیم به‌صورت روبه‌رو نمایش دهیم:



مسافت پیموده شده $=10+10+5+5=30m$

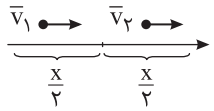
اما سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی ۰ تا $6s$ برابر صفر است. زیرا در لحظه‌ی $t_1=0$ در مکان $x_1=0$ و در لحظه‌ی $t_2=6s$ نیز در مکان $x_2=0$ قرار داشته و جابه‌جایی آن و در نتیجه سرعت متوسط آن صفر است.

حل چند مسأله‌ی خاص در مورد سرعت متوسط

مسأله‌ی (۱۴): متحرکی روی خط راست در یک جهت حرکت می‌کند. نیمی از مسیر حرکت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و نیمی دیگر را با سرعت متوسط $۱۵\frac{m}{s}$ می‌پیماید. سرعت متوسط در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

راه‌حل: ممکن است خیلی سریع پاسخ این سؤال را به‌صورت $\overline{v}=\frac{۱۰+۱۵}{۲}=۱۲/۵\frac{m}{s}$ بیان کنیم، اما توجه داشته باشید که تعریف اساسی سرعت متوسط نسبت جابه‌جایی به مدت زمان انجام جابه‌جایی است، نه میانگین سرعت‌ها! در این‌جا باید مدت حرکت هر قسمت را به‌طور جداگانه به‌دست آوریم. دقت کنید که در رابطه‌ی $\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، منظور از Δx کل جابه‌جایی انجام شده بوده و به همین ترتیب منظور از Δt نیز کل مدت پیمودن است. بنابراین در این پرسش که متحرک دو فاصله‌ی مساوی $\frac{x}{۲}$ و $\frac{x}{۲}$ را در یک جهت طی کرده است، به اندازه‌ی $\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}$ جابه‌جا شده است. در مدت Δt نیز باید گفت که کل مدت حرکت در بازه‌ی زمانی $t_۱+t_۲$ بوده است.

حال با استفاده از تعریف سرعت متوسط $(\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$، مقدارهای $t_۱$ و $t_۲$ را به‌دست آورده و در معادله‌ی سرعت متوسط قرار می‌دهیم:



$$\begin{cases}\overline{v}_۱=\frac{\frac{x}{۲}}{t_۱}\Rightarrow t_۱=\frac{x}{۲\overline{v}_۱}\\ \overline{v}_۲=\frac{\frac{x}{۲}}{t_۲}\Rightarrow t_۲=\frac{x}{۲\overline{v}_۲}\end{cases}\Rightarrow\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\overline{v}=\frac{\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}}{t_۱+t_۲}\Rightarrow\overline{v}=\frac{x}{\frac{x}{۲\overline{v}_۱}+\frac{x}{۲\overline{v}_۲}}=\frac{x}{x(\frac{۱}{۲\overline{v}_۱}+\frac{۱}{۲\overline{v}_۲})}=\frac{۱}{\frac{\overline{v}_۱+\overline{v}_۲}{۲\overline{v}_۱\overline{v}_۲}}=\frac{۲\overline{v}_۱\overline{v}_۲}{\overline{v}_۱+\overline{v}_۲}\Rightarrow\overline{v}=\frac{۲\times۱۰\times۱۵}{۱۰+۱۵}=۱۲\frac{m}{s}$$

تذکر: توجه کنید که این یک فرمول خاص است. یعنی فقط در این پرسش که متحرک نیمی از مسیر را با سرعت $v_۱$ و نیمی دیگر را با سرعت $v_۲$ در همان جهت طی می‌کند، قابل استفاده است و نمی‌توان همواره از آن استفاده کرد.

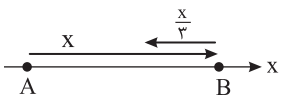
مسأله‌ی (۱۵): متحرکی روی خط راست نیمی از مدت حرکت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و باقی آن را با سرعت متوسط $۱۵\frac{m}{s}$ طی می‌کند. سرعت متوسط در کل مدت حرکت چند متر بر ثانیه است؟

راه‌حل: در این حالت، جابه‌جایی در دو قسمت برابر نیست. به‌طور مثال فرض کنید که شما یک ساعت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و یک ساعت بعدی را با سرعت متوسط $۱۵\frac{m}{s}$ طی می‌کنید. واضح است که در ساعت دوم حرکت، فاصله‌ی بیش‌تری را پیموده‌اید. در این‌جا لازم است که جابه‌جایی هر قسمت را به‌دست آوریم، با هم جمع کنیم و سپس بر کل مدت حرکت تقسیم نماییم:

$$\begin{cases}\overline{v}_۱=\frac{x_۱}{\frac{t}{۲}}\Rightarrow x_۱=\overline{v}_۱\frac{t}{۲}\\ \overline{v}_۲=\frac{x_۲}{\frac{t}{۲}}\Rightarrow x_۲=\overline{v}_۲\frac{t}{۲}\end{cases}\Rightarrow\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۱+x_۲}{t_۱+t_۲}=\frac{\overline{v}_۱\frac{t}{۲}+\overline{v}_۲\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}+\frac{t}{۲}}=\frac{\overline{v}_۱+\overline{v}_۲}{۲}\Rightarrow\overline{v}=\frac{۱۰+۱۵}{۲}=۱۲/۵\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی (۱۶): متحرکی با سرعت متوسط $۴۰\frac{m}{s}$ روی خط راست، فاصله‌ی AB را طی می‌کند و سپس $\frac{۱}{۳}$ همین مسیر را با سرعت متوسط $۲۰\frac{m}{s}$ برمی‌گردد. سرعت متوسط را در کل جابه‌جایی به‌دست آورید.

راه‌حل: ابتدا جابه‌جایی انجام شده را محاسبه می‌کنیم (می‌توانیم کل مسیر را x بگیریم):



$$\Delta x = x - \frac{۱}{۳}x = \frac{۲}{۳}x$$

مطابق روال قبل، مدت حرکت هر قسمت را به‌دست می‌آوریم:

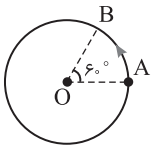
$$t_۱ = \frac{x}{v_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{x}{۴۰} \quad , \quad t_۲ = \frac{\frac{x}{۳}}{v_۲} \Rightarrow t_۲ = \frac{\frac{۱}{۳}x}{۲۰} = \frac{x}{۶۰}$$

حال رابطه‌ی سرعت متوسط را می‌نویسیم:

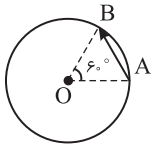
$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{x - \frac{۱}{۳}x}{t_۱ + t_۲} = \frac{\frac{۲}{۳}x}{\frac{x}{۴۰} + \frac{x}{۶۰}} = \frac{\frac{۲}{۳}x}{x(\frac{۳+۲}{۱۲۰})} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۱۲۰ \times ۲}{۳ \times ۵} = \frac{۲۴۰}{۱۵} = ۱۶\,\frac{m}{s}$$

تذکر: برخی از دانش‌آموزان انتظار دارند که به‌جای Δt بنویسیم $t_۲ - t_۱$، در حالی‌که منظور از Δt مدت حرکت است. در این‌جا کل مدت حرکت $\Delta t = t_۱ + t_۲$ بوده است.

مسأله‌ی (۱۷): در شکل روبه‌رو، ذره‌ای در مدت $۵s$ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌رود. شعاع دایره ۲ متر است. سرعت متوسط از A تا B را بیابید.



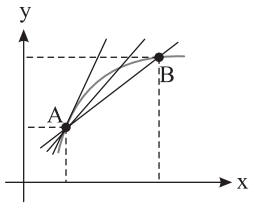
راه‌حل: جابه‌جایی برداری است که از ابتدا به انتهای مسیر رسم می‌شود. بنابراین بردار AB، بردار جابه‌جایی است و با توجه به این که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، اندازه‌ی AB برابر شعاع دایره، یعنی ۲ متر می‌باشد. بنابراین:



$$\overline{v} = \frac{AB}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴\,\frac{m}{s}$$

یادآوری ریاضی- شیب خط مماس

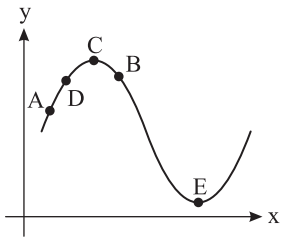
در شکل روبه‌رو نموداری رسم شده است. همان‌گونه که بیان شد، شیب خط قاطع بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با:



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

حال اگر نقطه‌ی B را روی نمودار به نقطه‌ی A نزدیک و نزدیک‌تر کنیم، شیب خط قاطع تغییر می‌کند و هنگامی که نقطه‌ی B بر نقطه‌ی A منطبق شود، شیب قاطع AB برابر شیب خط مماس در نقطه‌ی A می‌شود.

پرسش: در شکل روبه‌رو نموداری رسم شده است که نقطه‌ی C در آن را بیشینه مقدار y یا ماکزیمم منحنی و نقطه‌ی E را کمینه مقدار y یا می‌نیمم این منحنی می‌گویند؛

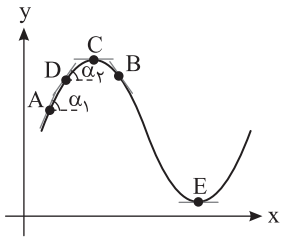


الف) در کدام نقطه‌ها شیب خط مماس مثبت است؟

ب) در کدام نقطه شیب خط مماس صفر است؟

پ) در کدام نقطه‌ها شیب خط مماس منفی است؟

پاسخ: الف) در نقطه‌های A و D، خط مماس با محور افقی زاویه‌ی حاده می‌سازد و شیب خط مماس یعنی تانژانت زاویه‌ای که خط با محور افقی می‌سازد $(m = \tan\alpha)$، مثبت است.



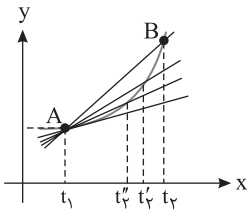
ب) در نقطه‌ی C، خط مماس موازی محور افقی (xها) است و زاویه‌ی بین خط مماس و محور افقی صفر است، بنابراین شیب خط مماس در نقطه‌ی C صفر است. در نقطه‌ی E نیز همین‌طور است.

پ) در نقطه‌ی B، خط مماس با محور افقی (xها) زاویه‌ی منفرجه می‌سازد و شیب خط مماس یعنی تانژانت این زاویه‌ی منفرجه در نقطه‌ی B منفی است.

نتیجه: **هرگاه خط مماس بر منحنی با محور افقی (xها) زاویه‌ی حاده بسازد شیب آن مثبت و هرگاه زاویه‌ی منفرجه بسازد شیب آن منفی است.**

در نقطه‌ی بیشینه (ماکزیمم) و نقطه‌ی کمینه (می‌نیمم) که خط مماس موازی محور افقی (xها) می‌باشد، شیب خط مماس صفر است.

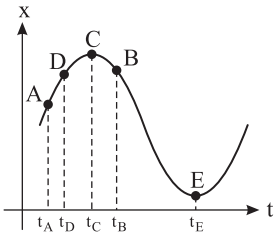
سرعت لحظه‌ای و نمودار مکان- زمان



اگـر در نمـودار مکان- زمان، فاصله‌ی زمانی Δt را بـه تدریج کوچک و کوچک‌تر کنیم، نقطه‌ی B خیلی به A نزدیک می‌شـود و در نهایت خط AB در نقطه‌ی A بر نمودار مماس می‌شـود. مطابق شکل روبه‌رو، ممکن است بپرسـید که چرا بازه‌ی زمانی را دائماً کوچک می‌کنیم؟ پاسـخ این است که در واقع با این عمل، ما در حال محاسبه‌ی سـرعت‌های متوسط در بازه‌های زمانی t_1-t_2، t_1-t_2'، $t_1'-t_2''$ و ... هستیم و هر قدر بازه‌ی زمانی کوچک‌تر شـود، سرعت متوسطی که به‌دسـت می‌آوریم به سرعت لحظه‌ای (سرعت در t_1) نزدیک‌تر می‌شود. در واقع سرعت لحظه‌ای همان سرعت متوسطی است که در بازه‌ی زمانی بسیار کوتاه به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار روبه‌رو و آن‌چه بیان شد نتیجه می‌گیریم:

نتیجه: **سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در آن نقطه از نمودار است.**

تذکر: سرعت لحظه‌ای سرعتی است که در هر لحظه متحرک دارا می‌باشد، مثلاً در حرکت اتومبیل، سرعتی که عقربه‌ی سرعت‌سنج در هر لحظه نشان می‌دهد همان سرعت لحظه‌ای است.



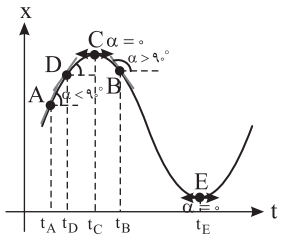
پرسش: **در شکل روبه‌رو، نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت بوده، رسم شده است:**

الف) در کدام لحظه‌ها سرعت مثبت و در کدام لحظه‌ها سرعت منفی است؟

ب) در چه لحظه‌هایی سرعت صفر بوده و متحرک تغییر جهت داده است؟

پ) در لحظه‌ی t_A سرعت بیش‌تر است یا لحظه‌ی t_D؟

پاسخ: نکته‌ی مهم و ضروری این است که شما باید فهمیده باشید که متحرک روی این مسیر خمیده حرکت نمی‌کند، بلکه روی محور xها در حرکت است و این نمودار در هر لحظه مکان متحرک را روی محور xها نشان می‌دهد. اکنون به حل مسأله می‌پردازیم.



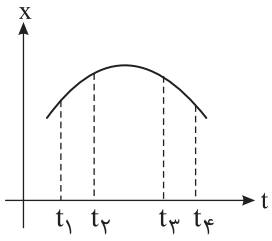
الف) در نقطه‌های A و D هنگامی که مطابق شکل، خط مماس را رسم می‌کنیم، این خط مماس با محور زمان، زاویه‌ی حاده می‌سـازد و شیب آن مثبت می‌شود، بنابراین در لحظه‌ی t_A و t_D، سرعت لحظه‌ای متحرک مثبت است. اما در نقطه‌ی B، خط مماس با محور زمان زاویه‌ی منفرجه می‌سازد و شیب خط مماس منفی بوده و سرعت لحظه‌ای در لحظه‌ی t_B، منفی است.

ب) در نقطه‌های C و E، خط مماس با محور زمان موازی بوده، شیب خط مماس صفر است، بنابراین سرعت لحظه‌ای در لحظه‌های t_C و t_E صفر است و در این لحظه‌ها متحرک تغییر جهت داده است.

نتیجه: **هرگاه خط مماس بر نمودار مکان- زمان با امتداد محور زمان زاویه‌ی حاده بسازد، سرعت مثبت و هرگاه زاویه‌ی منفرجه بسازد، سرعت منفی است. در نقطه‌های بیشینه (ماکزیمم) و کمینه (می‌نیمم)، سرعت لحظه‌ای صفر است.**

پ) به نمودار مکان- زمان پاسخ مجدداً نگاه کنید. در لحظه‌ی t_A، شیب خط مماس از لحظه‌ی t_D بیش‌تر است، بنابراین سرعت در لحظه‌ی t_A از سرعت در لحظه‌ی t_D بیش‌تر است.

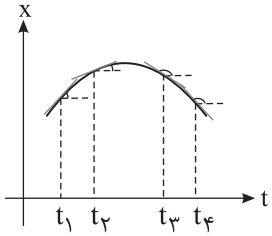
نتیجه: **هرچه قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان (تانژانت زاویه‌ی بین خط مماس و محور زمان) در یک لحظه بیش‌تر باشد، سرعت در آن لحظه بیش‌تر است.**



مسأله‌ی (۱۸): **در شکل روبه‌رو نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است، رسم شده است:**

الف) در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 سرعت لحظه‌ای متحرک در حال افزایش است یا کاهش؟ توضیح دهید.

ب) در بازه‌ی زمانی t_3 تا t_4 سرعت لحظه‌ای متحرک چگونه تغییر می‌کند؟



راه‌حل: الف) هرگاه مطابق شکل در لحظه‌های بین t_1 و t_2 بر نمودار مکان- زمان خط مماس رسم کنیم، خواهیم دید که شیب خط مماس در حال کاهش است، بنابراین سرعت در حال کاهش است و حرکت کندشونده است.

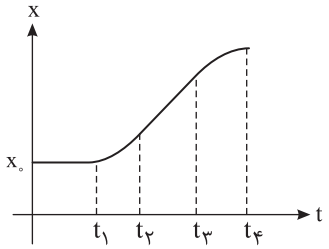
ب) در بازه‌ی زمانی t_3 تا t_4، شـیب خط مماس در حال افزایش اسـت پس سرعت در حال زیاد شدن و حرکت تندشونده است.

تعریف: **هرگاه اندازه‌ی سرعت متحرک در حال افزایش باشد، حرکت تندشونده و هرگاه اندازه‌ی سرعت در حال کاهش باشد، حرکت را کندشونده می‌گوییم.**

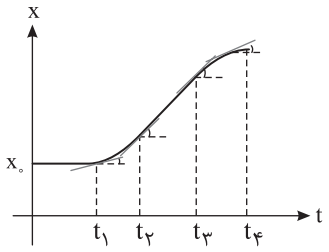
پرسش: **دو متحرک A و B با سرعت‌های $v_A = ۲\frac{m}{s}$ و $v_B = -۳\frac{m}{s}$ روی محور xها در حرکت هستند. سرعت متحرک A بیش‌تر است یا سرعت متحرک B؟ توضیح دهید.**

پاسخ: جواب این سؤال قطعاً این است که سرعت B از سرعت A بیش‌تر است و علامت منفی در سرعت $v_B = -۳\frac{m}{s}$ تنها بیان‌گر این است که متحرک B با سرعت $۳\frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور xها در حرکت است. متحرک A با سرعت $۲\frac{m}{s}$ که از $۳\frac{m}{s}$ کم‌تر است در جهت مثبت محور xها در حرکت است.

پرسش: **نمودار مکان- زمان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه رو است. چگونگی سرعت را در بازه‌های زمانی مختلف بررسی کنید. (در بازه‌ی ۰ تا $t_۱$ و $t_۲$ تا $t_۳$ نمودار خط راست است.)**



پاسخ: در شکل روبه‌رو کاملاً مشخص است که در بازه‌ی ۰ تا $t_۱$ مکان متحرک تغییر نمی‌کند و برابر $x_۰$ است. در واقع متحرک در بازه‌ی ۰ تا $t_۱$ ساکن بوده و سرعتش صفر است.

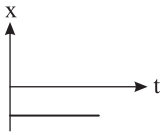


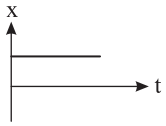
در بازه‌ی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار خمیده بوده و رسم چند خط مماس در این بازه مطابق شکل مشخص می‌کند که شیب خط مماس یعنی سرعت متحرک در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است.

در بازه‌ی $t_۲$ تا $t_۳$ نمودار خط راست مایل است و شیب آن مثبت و ثابت بوده، بنابراین متحرک در این بازه روی محور xها و در جهت مثبت با سرعت ثابت در حرکت است. در بازه‌ی $t_۳$ تا $t_۴$ نمودار خمیده بوده و با رسم چند خط مماس در این بازه مشخص می‌شود که شیب خط مماس یعنی سرعت متحرک در حال کاهش بوده و حرکت کندشونده است و در لحظه‌ی $t_۴$ سرعت صفر می‌شود. زیرا خط مماس موازی محور زمان شده و شیب آن صفر است.

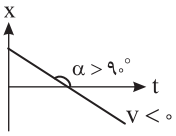
نتیجه:

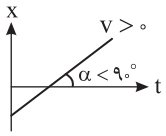
- اگر نمودار مکان- زمان به‌صورت خط افقی باشد، جسم ساکن است.



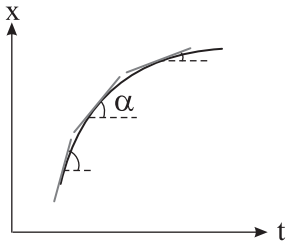


- اگر نمودار مکان- زمان به‌صورت خط راست مایل باشد، جسم دارای سرعت ثابت است. چنان‌چه زاویه‌ی بین نمودار با محور زمان حاده باشد، سرعت متحرک مثبت و چنان‌چه منفرجه باشد، سرعت متحرک منفی است.

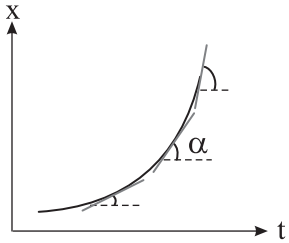




- اگر نمودار مکان- زمان خمیده باشد، سرعت متحرک در حال تغییر است و چنان‌چه شکل نمودار شبیه شکل (الف) باشد، سرعت متحرک در حال افزایش و حرکت تندشونده است و چنان‌چه شکل نمودار شبیه شکل (ب) باشد، سرعت متحرک در حال کاهش و حرکت کندشونده است.

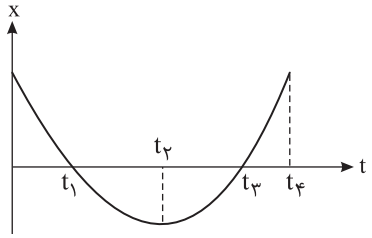


شکل (ب)



شکل (الف)

پرسش: نمودار مکان- زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک روی محور xها حرکت می‌کند.



الف) مکان متحرک در لحظه‌ی $t=0$ مثبت است یا منفی؟ سرعت آن چه‌طور؟

ب) در کدام لحظه‌ها متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد؟

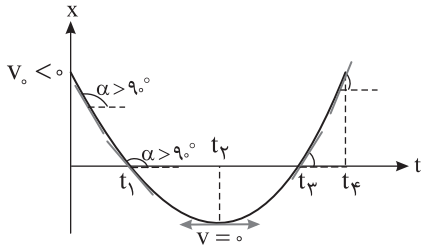
پ) در کدام بازه‌ی زمانی متحرک در حال حرکت به سوی مبدأ محور xها است؟

ت) در چه لحظه‌ای متحرک روی محور xها تغییر جهت داده است؟

ث) در بازه‌ی ۰ تا t_1 و t_1 تا t_2، علامت سرعت را مشخص کنید. در کدام‌یک از این دو بازه‌ی زمانی، حرکت کندشونده است؟

ج) در بازه‌ی t_3 تا t_4، حرکت تندشونده است یا کندشونده؟

پاسخ: الف) در لحظه‌ی $t=0$ (مبدأ زمان)، با توجه به شکل، مکان اولیه‌ی متحرک (x_0) مثبت است اما شیب خط مماس بر این نمودار در $t=0$، منفی بوده و سرعت در لحظه‌ی $t=0$ که به آن سرعت اولیه می‌گوییم، منفی است.



ب) در لحظه‌هایی که $x=0$ است متحرک از مبدأ می‌گذرد که روی شکل، این لحظه‌ها t_1 و t_3 هستند.

پ) در بازه‌های ۰ تا t_1 و t_2 تا t_3 فاصله‌ی متحرک از مبدأ در حال کاهش و متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد.

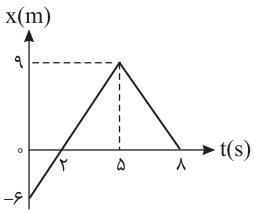
ت) در لحظه‌ی t_2، خط مماس، موازی محور زمان بوده، پس شیب خط مماس یعنی سرعت لحظه‌ای صفر است. در بازه‌ی ۰ تا t_2، متحرک در جهت منفی محور در حرکت بوده، در لحظه‌ی t_2، سرعتش صفر شده و تغییر جهت می‌دهد و پس از آن در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند.

ث) در هر در هر دو بازه خط مماس بر نمودار با محور زمان زاویه‌ی منفرجه می‌سازد پس شیب آن منفی و در نتیجه سرعت منفی است و با توجه به مماس‌های رسم شده اندازه‌ی سرعت در حال کم‌شدن است.

دقت کنید سرعت در لحظه‌ی t_2 صفر است. یعنی اندازه‌ی سرعت در بازه‌ی ۰ تا t_2 در حال کاهش و رو به صفر شدن است بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است.

ج) در بازه‌ی t_3 تا t_4، شیب خط مماس یعنی سرعت مثبت بوده و این شیب، با توجه به شکل، در حال زیاد شدن است یعنی حرکت تندشونده است.

مسأله‌ی (۱۹): نمودار مکان- زمان متحرکی به‌صورت روبه‌رو است:



الف) سرعت متوسط متحرک را در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت و ۳ ثانیه‌ی آخر حرکت به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط در مدت $8s$ چند متر بر ثانیه است؟

پ) سرعت متحرک در $t=4s$ چند متر بر ثانیه است؟

ت) متحرک در چه لحظه‌ای از مبدأ مکان عبور کرده است؟

ث) حرکت متحرک را به طرز ساده‌ای روی محور xها نشان دهید.

راه‌حل: الف) در ۵ ثانیه‌ی اول:

$$\overline{v}=\frac{x_5-x_0}{5-0}=\frac{9-(-6)}{5}=3\frac{m}{s}$$

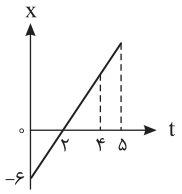
در ۳ ثانیه‌ی آخر:

$$\overline{v}=\frac{x_8-x_5}{8-5}=\frac{0-9}{3}=-3\frac{m}{s}$$

ب) در کل مدت $8s$:

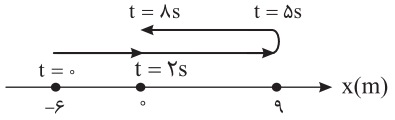
$$\overline{v}=\frac{x_8-x_0}{8-0}=\frac{0-(-6)}{8}=\frac{3}{4}\frac{m}{s}$$

پ) شیب نمودار بین ۰ تا ۵ ثانیه ثابت است، بنابراین در هر لحظه‌ای که بر نمودار مماس رسم کنیم، شیب خط حاصل یکسان خواهد بود. بنابراین سرعت در لحظه‌ی $t=4s$ برابر با همان سرعت متوسط در مدت صفر تا $5s$ است.

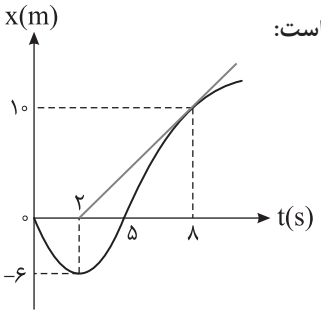


ت) با توجه به نمودار در $t=2s$ مکان متحرک $x=0$ است، بنابراین در $t=2s$ متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. همچنین در $t=8$ به مبدأ برگشته است.

ث) نمایش ساده‌ی زیر را می‌توان رسم کرد:



مسأله‌ی (۲۰): نمودار مکان- زمان متحرکی که بر محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است:



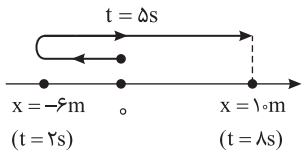
الف) حرکت متحرک را روی محور xها به طرز ساده‌ای نمایش دهید.

ب) متحرک در مدت $8s$ چند متر جابه‌جا شده است؟

پ) متحرک در مدت $8s$ چند متر از طول مسیر (چه مسافتی) را پیموده است؟

ت) سرعت متوسط متحرک در مدت $8s$ چند متر بر ثانیه است؟

ث) سرعت لحظه‌ای در $t_1=2s$ و $t_2=8s$ چند متر بر ثانیه است؟



راه‌حل: الف) این متحرک در بازه‌ی ۰ تا $2s$ از مبدأ مختصات تا ۶- متری مبدأ حرکت کرده و در $t=5s$ از مبدأ می‌گذرد و از $t=5s$ تا $t=8s$ از مبدأ به ۱۰ متری مبدأ می‌رسد.

ب) متحرک در بازه‌ی ۰ تا $8s$ از مکان $x=0$ به مکان $x=10m$ رفته و ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود.

$$\Delta x=x_2-x_1=10-0=10m$$

پ) متحرک ابتدا از مبدأ به اندازه‌ی ۶ متر خلاف جهت محور xها حرکت کرده است. سپس به همین اندازه برمی‌گردد تا به مبدأ برسد، آن‌گاه به اندازه‌ی ۱۰ متر دیگر در جهت محور xها حرکت می‌کند. بنابراین مسافت کل برابر است با:

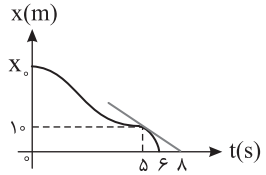
$$S=6+6+10=22m$$

ت) با مشخص کردن مکان آن در $t=0$ و $t=8s$ و با استفاده از تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{10-0}{8}=1/25\frac{m}{s}$$

ث) باید شیب خط مماس بر نمودار را در لحظه‌های $t_1=2s$ و $t_2=8s$ به‌دست آوریم. در $t_1=2s$ شیب خط مماس، یعنی سرعت صفر است و در $t=8s$، شیب خط مماس $m=\frac{10}{8-2}=\frac{5}{3}\frac{m}{s}$ است.

مسأله‌ی (۲۱): اگر سرعت متوسط متحرکی در مدت ۶ ثانیه‌ی اول برابر سرعت در لحظه‌ی $t=5s$ باشد، متحرک در مبدأ زمان در چه مکانی بوده است؟



راه‌حل: ابتدا سرعت در لحظه‌ی $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم، که شیب خطی است که در $t=5s$ بر نمودار مماس شده است:

$$v=\frac{-10}{8-5}=\frac{-10}{3}\frac{m}{s}$$

چون شیب خط مماس بر نمودار در $t=5s$ منفی است، سرعت در این لحظه منفی شده است. اما سرعت متوسط در مدت ۶ ثانیه برابر است با:

$$\bar{v}=\frac{0-x_0}{6}$$

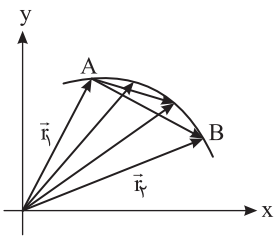
با برابر قرار دادن سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای خواهیم داشت:

$$\bar{v}=v\Rightarrow-\frac{x_0}{6}=-\frac{10}{3}\Rightarrow x_0=20m$$

مطالعه‌ی آزاد

سرعت لحظه‌ای در دو بُعد

با وجود آن‌که سرعت متوسط کمیت مفیدی است، اطلاعات چندانی را درباره‌ی چگونگی حرکت و تغییرات آن در لحظات مختلف نمی‌دهد. چنان‌چه بازه‌ی زمانی Δt را در نزدیکی یک لحظه‌ی معین، فوق‌العاده کوچک کنیم، جابه‌جایی انجام شده، یعنی $\Delta\vec{r}$ هم بسیار کوچک خواهد بود.



در این صورت به نسبت $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای می‌گوییم. توجه کنید که در واقع سرعت لحظه‌ای همان سرعت متوسطی است که در یک بازه‌ی زمانی بسیار کوتاه حاصل شده است. ملاحظه می‌شود که با کوچک شدن بازه‌ی زمانی Δt، $\vec{r}_2$ به $\vec{r}_1$ نزدیک شده و در نهایت $\Delta\vec{r}$ در نقطه‌ی A بر مسیر مماس می‌شود و طبق $\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$، سرعت متوسط که حال به سرعت لحظه‌ای تبدیل شده بر مسیر حرکت مماس است.