حسابان

(جلد دوم)

سال سوم رشته ریاضی

ویژه دانش‌آموزان ممتاز

مؤلفین:

حسین شفیع زاده

حمیدرضا کریمی

علی یوسفی

انتشارات خوشخوان

فهرست مطالب

٤

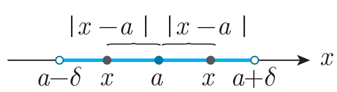
حد و پیوستگی

همسایگی

بازه‌ی $(a-\delta, a+\delta)$ را یک همسایگی متقارن a به شعاع δ و یا به‌طور خلاصه یک همسایگی a می‌نامند (δ عددی مثبت است). هر نقطه از این همسایگی فاصله‌اش از a کمتر از δ است.

شکل ۴-۱

نکته ۱ هر نقطه داخل همسایگی a دارای این خاصیت است که فاصله‌اش از a کمتر از δ است، به بیان دیگر هر نقطه x از همسایگی a در نامساوی $|x-a|<\delta$ صدق می‌کند و برعکس.



شکل ۴-۲

همسایگی محذوف

اگر عدد a را از همسایگی حذف کنیم، آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامیم.

شکل ۴-۳

همسایگی محذوف a را به صورت‌های $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ یا $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ و یا $\circ<|x-a|<\delta$ می‌توان نشان داد.

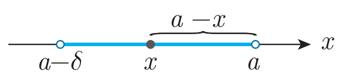
مثال ۱ چند عدد صحیح در همسایگی محذوف ۳ به شعاع $\frac{۵}{۲}$ وجود دارد؟

حل همسایگی خواسته شده به‌صورت $(۳-\frac{۵}{۲}, ۳+\frac{۵}{۲})-\{۳\}$ و یا $(۰/۵, ۵/۵)-\{۳\}$ می‌باشد. اعداد صحیح $x=۱, ۲, ۴, ۵$ در این همسایگی محذوف قرار دارند. (توجه به شکل ۴ـ۴)

شکل ۴-۴

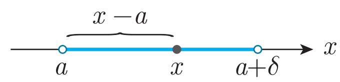
همسایگی یک‌طرفه

بازه‌ی $(a-\delta, a)$ را که δ یک عدد مثبت است یک همسایگی (محذوف) چپ a و بازه‌ی $(a, a+\delta)$ را یک همسایگی (محذوف) راست a می‌نامیم.



$(a-x<\delta)$

شکل ۴-۶



$(x-a<\delta)$

شکل ۴-۵

به‌طور مثال تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ در یک همسایگی راست -۲ و در یک همسایگی چپ $+۲$ تعریف شده است و یا تابع $y=\sqrt{x-۱}$ در یک همسایگی راست ۱ تعریف شده است ولی در همسایگی چپ ۱ تعریف شده نیست.

مثال ۲

فرض کنید: $f(x)=\dfrac{۴x^۲-x-۳}{x-۱}$، به ازای چه مقادیری از x رابطه‌ی $|f(x)-۷|<\dfrac{۴}{۱۰۰}$ برقرار است؟ $(x\neq ۱)$

حل

$$|f(x)-۷|<\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow \left|\frac{۴x^۲-x-۳}{x-۱}-۷\right|<\frac{۴}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{۴x^۲-۸x+۴}{x-۱}\right|<\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow \left|\frac{۴(x-۱)^۲}{x-۱}\right|<\frac{۴}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow |۴(x-۱)|<\frac{۴}{۱۰۰}\Rightarrow |x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow \frac{-۱}{۱۰۰}<x-۱<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۰/۹۹<x<۱/۰۱$$

یعنی x در یک همسایگی محذوف ۱ (به شعاع ۰/۰۱) قرار دارد.

تست

کدام تابع زیر در یک همسایگی راست ۱ تعریف شده است، ولی در هیچ همسایگی چپ ۱ تعریف شده نیست؟

۱) $y=\dfrac{\sqrt{x^۲-۱}}{۱-[x]}$ ۲) $y=\dfrac{\sqrt{x^۲-۱}}{[x]}$ ۳) $y=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{[-x]}$ ۴) $y=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{[x]}$

حل ۱ ۲ ۳ ۴

گزینه‌ی ۱: دامنه‌ی این تابع به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۱\\ ۱-[x]\neq ۰\Rightarrow [x]\neq ۱\Rightarrow x<۱ \text{ یا } x\geq ۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{دامنه}=(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$$

شکل ۴-۷

این تابع در همسایگی راست ۱ تعریف شده نیست. یعنی دامنه تابع شامل یک همسایگی راست ۱ نیست.

گزینه‌ی ۲: دامنه‌ای این تابع به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۱\\ [x]\neq ۰\Rightarrow x<۰ \text{ یا } x\geq ۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{دامنه}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

شکل ۴-۸

این تابع در همسایگی راست ۱ تعریف شده و در همسایگی چپ ۱ تعریف نشده است. در گزینه‌های ۳ و ۴، تابع در همسایگی راست ۱ تعریف شده نیست.

تعریف و مفهوم حد

شکل ۴-۹

تابع $f(x) = ۲x + ۱$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x در یک همسایگی محذوف ۲ قرار دارد. هر چه مقدار x را به ۲ (از دو طرف) نزدیک‌تر کنیم مقدار $f(x)$ به ۵ نزدیک‌تر می‌شود. در جدول زیر مقدار $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x نشان داده شده است.

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	۴/۸	۴/۹۸	۴/۹۹۸	→	۵	←	۵/۰۰۲	۵/۰۲	۵/۲

در دستگاه مختصات نیز می‌توان نزدیک شدن $f(x)$ به ۵ را در اثر نزدیک شدن x به ۲ مشاهده نمود.

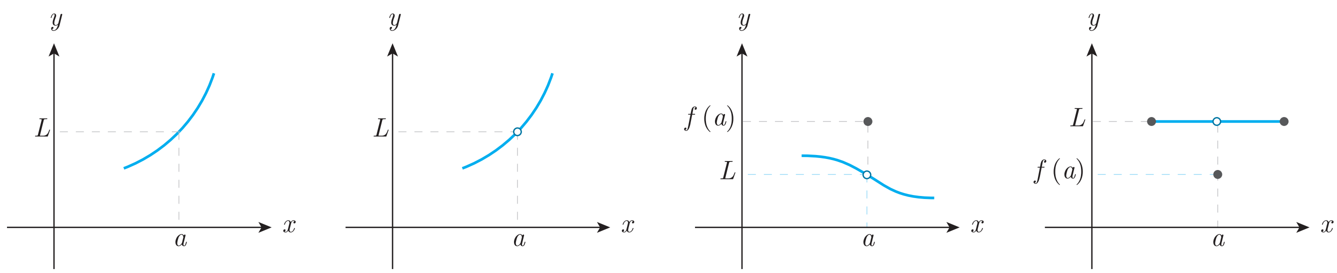
هر چه x روی محور xها در همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک‌تر شود مقدار y روی محور yها به ۵ نزدیک و نزدیک، و نزدیک‌تر می‌شود. در این حالت گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به ۲ میل می‌کند برابر ۵ است و به‌صورت $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$ نشان می‌دهیم.

تعریف حد

گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ هرگاه فاصله $f(x)$ از L، از هر مقداری که انتخاب کنیم کوچک‌تر شود، به شرط آن‌که x در دامنه، به اندازه‌ی کافی به a نزدیک شود.

به بیان «خودمونی» اگر x را در یک همسایگی محذوف a (در دامنه f) از دو طرف به a نزدیک کنیم و مشاهده کنیم $f(x)$ به عدد L نزدیک‌تر می‌شود حد تابع f در نقطه‌ی a را L گوییم و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

در تمام نمودارهای زیر حد تابع f در نقطه‌ی a برابر L است.



(الف) (ب) (پ) (ت)

شکل ۴-۱۰

تذکر

ممکن است در نقطه‌ی a تابع f تعریف نشده باشد و یا $f(a)$ موجود باشد ولی با L برابر نباشد. در واقع وجود و یا عدم وجود و حتی مقدار $f(a)$، در وجود و یا عدم وجود حد f در نقطه‌ی a و یا مقدار حد f در نقطه‌ی a هیچ تأثیری ندارد.

حد چپ و حد راست

شکل ۴-۱۱

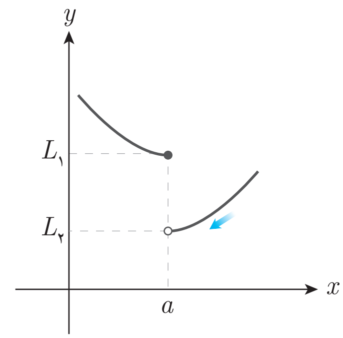
اگر در یک همسایگی چپ a (در دامنه f) مقدار x به a نزدیک شود و مقدار $f(x)$ به عدد L نزدیک شود گوییم f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به‌صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ نشان می‌دهیم و اگر در یک همسایگی راست a (در دامنه f) مقدار x به a نزدیک شود و در نتیجه‌ی آن مقدار $f(x)$ به L نزدیک شود، گوییم f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به‌صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ نشان می‌دهیم.

در واقع حد چپ f در نقطه‌ی a زمانی برابر L است که هر چه مقدار x از مقادیر کمتر از a به a نزدیک‌تر شود مقدار $f(x)$ به L نزدیک‌تر شود و زمانی حد راست f در نقطه‌ی a برابر L است که هر چه مقدار x از مقادیر بیشتر از a به a نزدیک‌تر شود مقدار $f(x)$ به L نزدیک‌تر شود.

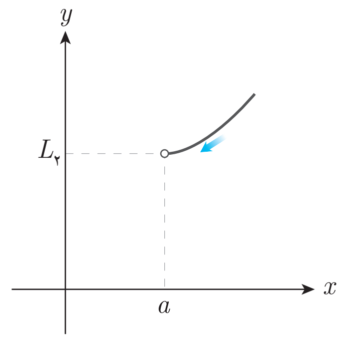
در شکل ۴ـ۱۱، هر چه x از سمت راست به a نزدیک‌تر شود مقدار y به $L_۲$ نزدیک‌تر می‌شود، پس $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_۲$ ، و هر چه x از سمت چپ به a نزدیک‌تر شود مقدار y به $L_۱$ نزدیک‌تر می‌شود، پس

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$.

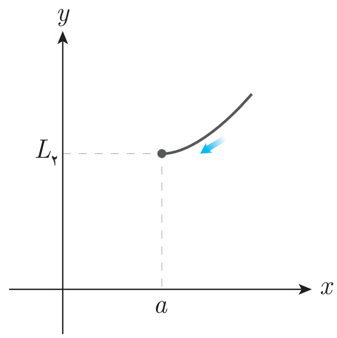
به نمودارهای شکل ۴ـ۱۲ توجه کنید و مفهوم حد چپ و راست را مشاهده کنید:



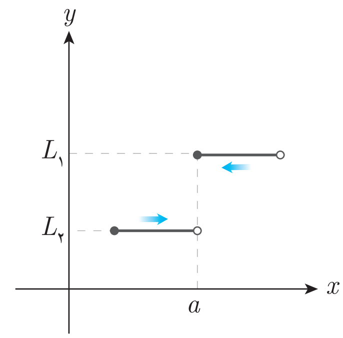
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2,\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$



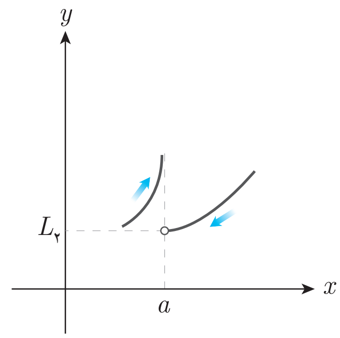
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$



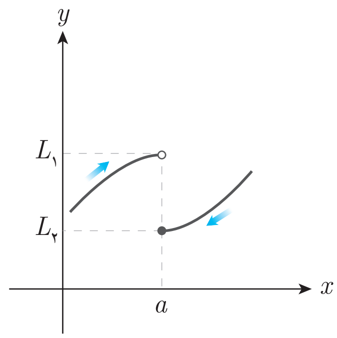
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2,\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2,\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) =$ وجود ندارد



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2,\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$

شکل ۴-۱۲

مثال ۳ مقدار a را به گونه‌ای بیابید که حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x>1 \\ 3x+a & x<1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$، از حد چپ آن در این نقطه، یک واحد بیشتر باشد.

حل نمودار این تابع به‌صورت شکل ۴ـ۱۳ است. مشاهده می‌شود که $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3+a$. پس $1 + (3+a) = 5$ و یا $a = 1$.

شکل ۴-۱۳

مثال ۴ با توجه به شکل ۴ـ۱۴ مقادیر $\lim\limits_{x\to 1^+} fof(x)$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} f(-x^2)$ را به‌دست آورید.

شکل ۴-۱۴ شکل ۴-۱۵ شکل ۴-۱۶

حل

الف) وقتی $x \to 1^+$، مقدار $f(x)$ از مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک می‌شود. (شکل ۴ـ۱۵)
یعنی $f(x) \to 1^+$، بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^+} f(f(x))$ برابر $f(1^+)$ است، حاصل $f(1^+)$ برابر ۱ است. یعنی $\lim\limits_{x\to 1^+} f(f(x)) = 1$.

ب) با توجه به شکل ۴ـ۱۶، وقتی $x \to -1^-$، مقدار x از -1 کمتر است. پس:

$$x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1$$

پس مقدار $f(t)$ برای مقادیر t کمتر از -1 را می‌خواهیم:

$$\lim_{x\to -1^-} f(-x^2) = \lim_{t\to -1^-} f(t) = -2$$

شکل ۴-۱۷

تذکر

شرط آن که بتوان در مورد حد چپ یک تابع در نقطه‌ی a صحبت کرد آن است که، تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

به‌طور مشابه زمانی می‌توان از حد راست یک تابع در نقطه‌ی a صحبت کرد که تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

به‌طور مثال تابع $y=\sqrt{۴-x^۲}$ در یک همسایگی راست $x=-۲$ و یک همسایگی چپ $x=۲$ تعریف شده است (شکل ۴ـ۱۷). پس:

$$\lim_{x\to -۲^+}\sqrt{۴-x^۲}=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-x^۲}=۰$$

قرارداد مهم

شکل ۴-۱۸

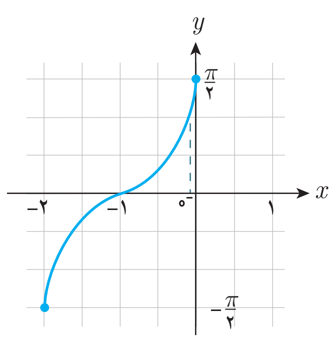
فرض کنید تابع f فقط در همسایگی راست a تعریف شده باشد، در این‌صورت وقتی در مورد حد تابع f در نقطه‌ی a صحبت می‌کنیم منظور همان حد راست f در نقطه‌ی a است.

به‌طور مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، منظور از حد f در نقطه‌ی a همان حد چپ f در نقطه‌ی a است.

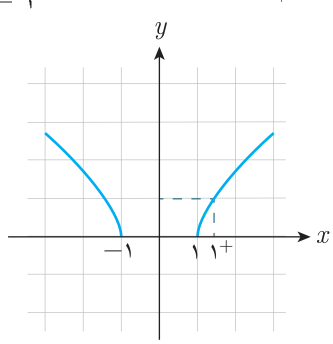
به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱) با توجه به شکل ۴ـ۱۸ داریم:
$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}=۰$$

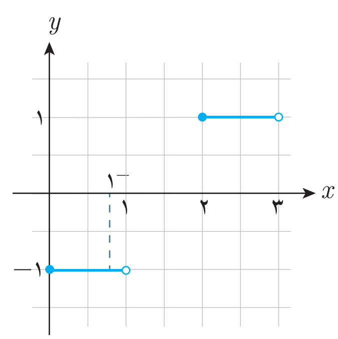
۲) با توجه به شکل ۴ـ۱۹ داریم:
$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{[x]-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{[x]-۱}=\frac{۱}{۰-۱}=-۱$$



شکل ۴-۲۱



شکل ۴-۲۰



شکل ۴-۱۹

۳) با توجه به شکل ۴ـ۲۰ داریم:
$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲-۱}=۰$$

۴) با توجه به شکل ۴ـ۲۱ داریم:
$$\lim_{x\to ۰}\sin^{-۱}(x+۱)=\lim_{x\to ۰^-}\sin^{-۱}(x+۱)=\frac{\pi}{۲}$$

تذکر

اگر تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد آنگاه به شرطی در نقطه‌ی a حد دارد که حد راست و حد چپ در نقطه‌ی a موجود و برابر باشند؛ در این‌صورت حد مشترک چپ و راست همان حد تابع است.

تذکر

اگر f در اطراف a تعریف شده باشد و در نقطه‌ی a حد چپ و راست متفاوت داشته باشد، آنگاه در نقطه‌ی a حد ندارد.

تذکر

اگر f در همسایگی راست a (چپ a) تعریف شده باشد ولی حد راست (حد چپ) نداشته باشد آنگاه f در نقطه‌ی a حد ندارد.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱. تابع $y=[x]$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد. چون این تابع در اطراف ۲ تعریف شده است و حد چپ و راست دارد، ولی برابر نیستند. (شکل ۴ـ۲۲)

$$\lim_{x\to ۲^+}[x]=۲ \qquad \lim_{x\to ۲^-}[x]=۱$$

۲. تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x & x<۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ حد ندارد چون در اطراف $x=۰$ تعریف شده است ولی حد راست ندارد: (شکل ۴ـ۲۳)

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}x=۰$$
$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=\text{حد ندارد}$$

۳. تابع $y=\sqrt{۲-x}$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد دارد چون این تابع فقط در همسایگی چپ ۲ تعریف شده است پس منظور از حد آن همان حد چپ آن است. (شکل ۴ـ۲۴)

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{۲-x}=\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۲-x}=۰$$

شکل ۴-۲۲ شکل ۴-۲۳ شکل ۴-۲۴

۴. تابع $y=[x]$ با دامنه‌ی $[۲,۳)$ در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ حد دارد، چون در نقطه‌ی $x=۲$ فقط در یک همسایگی راست آن تعریف شده است، پس منظور از حد آن در نقطه‌ی $x=۲$ همان حد راست آن در این نقطه است:

$$\lim_{x\to ۲}[x]=\lim_{x\to ۲^+}[x]=۲$$

و در نقطه‌ی $x=۳$ چون فقط در یک همسایگی چپ آن تعریف شده است، پس منظور از حد آن در نقطه‌ی ۳ همان حد چپ آن در این نقطه است:

$$\lim_{x\to ۳}[x]=\lim_{x\to ۳^-}[x]=۲$$

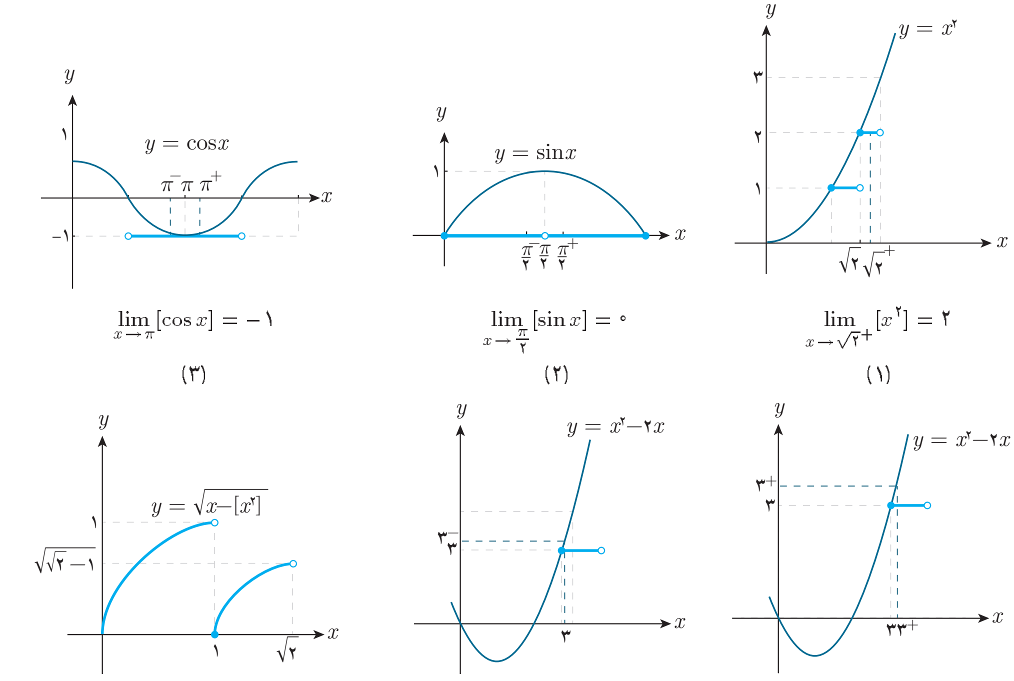
دقت کنید تابع $y=[x]$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ حد ندارد چون در اطراف این نقاط تعریف شده و دارای حد چپ و راست متفاوت است.

مثال ۵ به کمک رسم، حد توابع زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^+}[x^۲]$ ۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ ۳) $\lim\limits_{x\to \pi}[\cos x]$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳^+}[x^۲-۲x]$ ۵) $\lim\limits_{x\to ۳^-}[x^۲-۲x]$ ۶) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}}\sqrt{x-[x^۲]}$

حل



$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}[x^2] = 2$ (۱)

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x] = 0$ (۲)

$\lim_{x\to\pi}[\cos x] = -1$ (۳)

$\lim_{x\to 3^+}[x^2-2x] = 3$ (۴)

$\lim_{x\to 3^-}[x^2-2x] = 2$ (۵)

$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (۶)

شکل ۴-۲۵

تست حاصل $\lim_{x\to\frac{1}{7}^-}[\frac{-2}{x}] + \lim_{x\to\frac{1}{3}^+}[\frac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) -11 ۲) -14 ۳) -13 ۴) -12

حل ۳

وقتی $x=\frac{1}{3}$، آنگاه $\frac{1}{x}=3$، ولی وقتی $x\to\frac{1}{3}^+$ آنگاه x کمی بیش از $\frac{1}{3}$ است؛ یعنی $x>\frac{1}{3}$ و از آنجا $\frac{1}{x}<3$ می‌باشد؛ یعنی $\frac{1}{x}$ کمی کمتر از ۳ است، پس:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}[\frac{1}{x}] = [3^-] = 2$$

به‌طور مشابه اگر $x=\frac{1}{7}$، آنگاه $\frac{-2}{x}=-14$، ولی چون $x<\frac{1}{7}$ است پس $-\frac{1}{x}<-14$، به عبارتی $-\frac{1}{x}$ کمی کمتر از -14 است، پس:

$$\lim_{x\to\frac{1}{7}^-}[-\frac{2}{x}] = [-14^-] = -15$$

دقت کنید که منظور از -14^- آن است که داخل براکت کمی کمتر از -14 است. در واقع $-15<-14^-<-14$، پس: $[-14^-]=-15$.

بنابراین جواب تست برابر -13 است.

نکته ۲ تابع $y=[x]$ در $x=n$ با فرض صحیح بودن n به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to n^+}[x] = n \quad , \quad \lim_{x\to n^-}[x] = n-1$$

ولی اگر حد $[x]$ را در نقطه غیرصحیح $x=a$ خواسته باشیم، داریم:

$$\lim_{x\to a}[x] = [a]$$

شکل ۴-۲۶

نکته ۳ در حالت کلی اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، به‌طوری‌که $f(a)$ صحیح نباشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[f(a)]$.

به‌طور مثال $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}[x^۲-۳x]=[\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲}]=-۲$.

ولی اگر $f(a)$ صحیح باشد، آنگاه سه حالت وجود دارد.

حالت اول. اگر در اطراف a تابع f صعودی باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a^-}[f(x)]=f(a)-۱\quad,\quad\lim_{x\to a^+}[f(x)]=f(a)$$

دلیل این مطلب در نمودار ۴ـ۲۶ مشخص است.

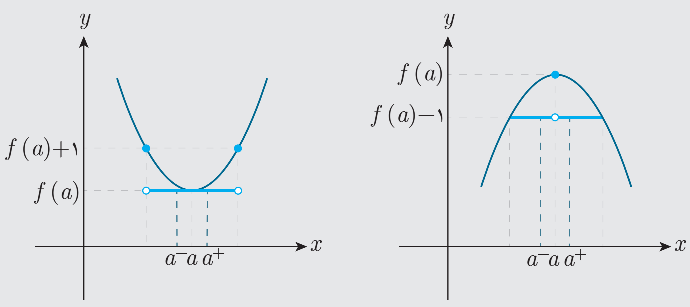
به‌طور مثال $\lim\limits_{x\to۳^+}[x^۲-۲x]=۳$ و $\lim\limits_{x\to۳^-}[x^۲-۲x]=۲$.

حالت دوم. اگر در اطراف a تابع f نزولی باشد، آنگاه با توجه به نمودار ۴ـ۲۷ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a^-}[f(x)]=f(a)\quad,\quad\lim_{x\to a^+}[f(x)]=f(a)-۱$$

شکل ۴-۲۷

حالت سوم: اگر در یک طرف a تابع f صعودی و در طرف دیگر نزولی باشد، آنگاه طبق نمودارهای زیر خواهیم داشت:



(ب) (الف)

شکل ۴-۲۸

طبق شکل ۴ـ۲۸ الف می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]=f(a)-۱$$

و همچنین طبق شکل ۴ـ۲۸ ب می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]=f(a)$$

به‌طور مثال: $\lim\limits_{x\to۰}[x^۲]=۰$ و یا $\lim\limits_{x\to۰}[-x^۲]=-۱$. همچنین: $\lim\limits_{x\to۱}[x^۲-۲x]=-۱$ و $\lim\limits_{x\to۲}[-x^۲+۴x]=۳$.

تست حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[۳-\cos x]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

حل ۱

اگر $x=\frac{\pi}{۲}$، آنگاه $\cos x=۰$، ولی چون وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}^+$، آنگاه $x>\frac{\pi}{۲}$ است. پس $\cos x$ کمی از ۰ کمتر است که با ۰^- نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}[۳-\cos x]=[۳-۰^-]=[۳+۰^+]=[۳^+]=۳$$

بیشتر بدانیم